

Davis-Putnam-menetelmä

Käsiteltäviä asioita:

1. DP-menetelmän perusidea
2. Muunnossäännöt
3. DP-taulut
4. DP-todistukset
5. Soveltaminen päättelytehtävissä
6. Vertailu semanttisten taulujen kanssa
7. Menetelmän muunnelmia

Perusideat (jatkoa)

- Klausuulijoukon S toteutuvuutta tutkitaan muodostamalla **DP-taulu**, joka on rakenteeltaan puu, jonka juurisolmuna on S .
- Taulun jokaisen solmun (klausuulijoukon) lapsisolmut saadaan muuntamalla ko. solmua muunnossäännöillä.
- Muunnokset säilyttävät toteutuvuuden:
Jos solmu (klausuulijoukko) on toteutuva, ainakin yksi sen muunnoksella saaduista lapsista on myös toteutuva.
- Klausuulijoukkoja muunnetaan, kunnes on ilmeistä, ovatko ne toteutuvia vai ei (eliminoimalla toteutuneet klausuulit ja muista klausuuleista epätodet literaalit):
 - (i) Tyhjä klausuulijoukko on toteutuva.
 - (ii) Tyhjän klausuulin sisältävä klausuulijoukko ei ole toteutuva.

1. DP-menetelmän perusideat

- Tehokkaimmat nykyiset lauselogiikan ratkaisumenetelmät pohjautuvat **DP-menetelmään** [Davis-Logemann-Loveland, 1962], jota usein (hieman epätarkasti) kutsutaan Davis-Putnam-menetelmäksi [1960].
- Kysymyksessä ns. refutaatiomenetelmä: lause P todistetaan aloittamalla lauseesta $\neg P$ ja johtamalla ristiriita:
Lause $\neg P$ muunnetaan klausuulijoukoksi (konjunkttiivinen normaalimuoto), joka osoitetaan toteutumattomaksi.
- Menetelmällä voidaan myös hakea klausuulijoukolle mallia/malleja.
- Täydellinen menetelmä: päättää jokaisen klausuulijoukon osalta, onko joukko toteutuva vai ei.

Määritelmiä

- Literaalin L **komplementti** \bar{L} :
Olkoon A atomilause. $\bar{A} = \neg A$ ja $\overline{\neg A} = A$.
- **Tyhjä klausuuli**: \perp
Esim. Jos klausuulista $A \vee \neg B$ poistetaan literaalit A ja $\neg B$, jäljelle jää tyhjä klausuuli \perp .
Tyhjä klausuuli \perp on jokaisessa mallissa epätosi.
- Klausuulijoukon esikäsittely:
 - (i) Poistetaan kustakin klausuulista moneen kertaan esiintyvät literaalit.
 - (ii) Poistetaan **tautologiset** (aina todet) klausuulit, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti.

2. Muunnossäännöt

► Yhden literaalin sääntö (One-literal rule):

Olkoon klausuulijoukossa S yhden literaalin klausuuli L .

Muunnetaan S poistamalla

- (i) kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L ja
- (ii) muista klausuuleista literaali \bar{L} (yksikköresoluutio).

► *Malliehto:* L tosi.

Esimerkki. Olkoon $S = \{\neg A, A \vee B \vee C, \neg A \vee D\}$.

Yhden literaalin sääntö muuntaa joukon S muotoon $\{B \vee C\}$.

Malliehto: $\neg A$ tosi.

► Peittosääntö (Subsumption rule):

Olkoon klausuulijoukossa S klausuulit C_1 ja C_2 siten, että C_2 *peittää* klausuulin C_1 (jokainen klausuulin C_1 literaali esiintyy myös klausuulissa C_2).

Muunnetaan S poistamalla C_2 .

► *Ei malliehtoa!*

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Peittosääntö muuntaa joukon S muotoon

$\{A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Ei malliehtoa.

► Komplementti puuttuu -sääntö (Affirmative-negative rule):

Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalien L ja \bar{L} muttei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalien \bar{L} .

Muunnetaan S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalien L .

► *Malliehto:* L tosi.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee \neg C\}$.

Komplementti puuttuu -sääntö muuntaa joukon S muotoon $\{\neg A \vee \neg C\}$.

Malliehto: $\neg B$ tosi.

► Haarautumissääntö (Splitting rule):

Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalien L ja \bar{L} .

Muunnetaan S kahdeksi joukoksi S_L ja $S_{\bar{L}}$.

► S_L saadaan joukosta S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalien L ja muista klausuuleista literaali \bar{L}
Malliehto: L tosi.

► $S_{\bar{L}}$ saadaan joukosta S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalien \bar{L} ja muista klausuuleista literaali L
Malliehto: \bar{L} tosi.

Esimerkki. Joukosta $S = \{A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$ saadaan:

$S_A = \{\neg B\}$ (malliehto: A tosi) ja

$S_{\neg A} = \{\neg B \vee \neg C\}$ (malliehto: $\neg A$ tosi).

3. DP-taulut

DP-taulut määritellään seuraavaan tapaan rekursiivisesti:

Määritelmä. Puu T , jonka solmuina on klausuulijoukkoja ja jonka solmujen asteluku on korkeintaan kaksi, on DP-taulu \iff

1. T :n ainoana solmuna (eli sekä juuri- että lehtisolmuna) on mikä tahansa klausuulijoukko S ; tai
2. T' on DP-taulu ja T saadaan soveltamalla johonkin T' :n lehtisolmuna olevaan klausuulijoukkoon S muunnossääntöä ja liittämällä syntyvät 1 tai 2 klausuulijoukkoa solmun S lapsiksi.

Malliehdot kirjataan kunkin solmun lapsisolmuihin johtaville kaarille.

DP-taulujen ominaisuudet I

Väite. Olkoon S äärellinen klausuulijoukko ja T juurisolmusta S muodostettu DP-taulu. Tällöin

S on toteutuva \implies jokin taulun T lehtisolmuista on toteutuva.

Todistus. Väite pitää paikkansa, jos S on taulun T ainoa solmu (sekä juuri- että lehtisolmu).

Muussa tapauksessa T on muodostettu DP-tilusta T' liittämällä siihen lapsisolmu(t) S'_1 (ja S'_2). Induktio-oletuksen nojalla taulussa T' on lehtisolmu S' joka on toteutuva.

1. Jos S' on S'_1 :n (ja S'_2) isäsolmu, klausuulijoukko S'_1 (tai S'_2) on toteutuva, koska *muunnossäännöt säilyttävät toteutuvuuden*.
2. Muutoin S' on toteutuva ja myös T :n lehtisolmu.

Polkuja koskevia määritelmiä

Olkoon T DP-taulu ja P jokin taulun T polku juurisolmusta S lehtisolmuun S' . Polkua P kutsutaan

1. *onnistuneeksi*, jos $\perp \in S'$, ja
2. *epäonnistuneeksi*, jos $S' = \emptyset$.

Vastaavasti, taulu T on

1. *valmis*, jos sen kaikki polut ovat joko onnistuneita tai epäonnistuneita, ja
2. *onnistunut*, jos sen kaikki polut ovat onnistuneita.

Esimerkki. Oletetaan, että klausuulijoukosta S saadaan haarautumissäännöllä S_L ja $S_{\bar{L}}$. Nyt S on toteutuva $\iff S_L$ on toteutuva tai $S_{\bar{L}}$ on toteutuva.

Väite. Olkoon S äärellinen klausuulijoukko. Juurisolmusta S muodostettu DP-taulu T on aina äärellinen ja saatettavissa valmiiksi.

Todistus. Sääntöjä voidaan soveltaa vain äärellisen monta kertaa, koska S on äärellinen ja jokainen muunnossääntö vähentää atomilauseiden määrää tai klausuulien määrää (peittosääntö). Näin DP-taulu muodostuu aina äärelliseksi.

Oletetaan, että taulun T polku P (juurisolmusta S lehtisolmuun S') ei ole onnistunut eikä epäonnistunut. Tällöin $S' \neq \emptyset$ ja $\perp \notin S'$.

Taulun konstruointia voidaan jatkaa valitsemalla klausuuli $C \in S'$ ja C :n literaali L . Jos literaali \bar{L} esiintyy S' :ssä, voidaan käyttää haarautumissääntöä, muutoin komplementti puuttuu -sääntöä.

DP-taulujen ominaisuudet II

Teorema. Olkoon S äärellinen klausuulijoukko ja T mikä tahansa juurisolmusta S muodostettu valmis DP-taulu.

Tällöin S on toteutumaton $\iff T$ on onnistunut.

Todistus. Jos S on toteutuva, niin taulussa T on välttämättä lehtisolmu S' , joka on toteutuva (osoitettiin edellä). Koska T on valmis, ainoana mahdollisuutena on $S' = \emptyset$, joten T on epäonnistunut.

Jos T on epäonnistunut, sillä on polku P , jonka lehtisolmulle S' pätee $S' = \emptyset$. Valitsemalla totuusjako \mathcal{A} siten, että

1. $A \in \mathcal{A}$, jos polulla P on malliehto A , ja
2. $A \notin \mathcal{A}$, jos polulla P on malliehto $\neg A$,

saadaan polulla P esiintyvillä klausuulijoukoille (S mukaanlukien) malli.

4. DP-todistukset

Määritelmä. Lauseen P DP-todistus on *onnistunut* DP-taulu T , jonka juurisolmuna on lausetta $\neg P$ vastaava klausuulijoukko S .

Huomio. Vastaava epäonnistunut DP-taulu antaa lauseelle P vastamallin ($\not\models P$): valitaan epäonnistunut polku P ja totuusjako \mathcal{A} esim. siten, että $A \in \mathcal{A} \iff$ malliehto A esiintyy polulla P .

Teorema. DP-todistusten *virheettömyys* ja *täydellisyys*:
Lause P on pätevä \iff lauseella P on DP-todistus.

Todistus. Lause P pätevä

- \iff lauseen $\neg P$ klausuulimuoto S on toteutumaton
- \iff juurisolmusta S muodostettu valmis DP-taulu on onnistunut
- \iff lauseella P on DP-todistus.

DP-taulujen ominaisuudet III

- Vaikka DP-tauluissa käytettävät muunnossäännöt säilyttävät toteutuvuuden, klausuulijoukkojen mallit eivät välttämättä säily.
- Erityisesti komplementti puuttuu -sääntö sulkee pois malleja.

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa $S = \{A \vee B\}$.

1. Soveltamalla komplementti puuttuu -sääntöä A :n suhteen, saadaan klausuulijoukoksi $S' = \emptyset$ ja malliehdoksi A .
2. Koska lopputuloksena on tyhjä klausuulijoukko, malliehdon A nojalla klausuulijoukolle S voidaan muodostaa kaksi mallia $M_1 = \{A\}$ ja $M_2 = \{A, B\}$.
3. Klausuulijoukolla on kuitenkin kolmas malli $M_3 = \{B\}$.

5. Soveltaminen päättelytehtävissä

Esimerkki. Todistetaan $\phi = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P \wedge Q$.

1. Muunnetaan lauseen negaatio klausuulimuotoon:

$$\begin{aligned} \neg \phi &\rightsquigarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \\ &\rightsquigarrow \{\neg P \vee Q, \neg Q \vee P, P \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}. \end{aligned}$$

2. Muodostetaan onnistunut DP-taulu (malliehdot annettu suluissa):

$$\begin{array}{c} \{\neg P \vee Q, \neg Q \vee P, P \vee Q, \neg P \vee \neg Q\} \\ \begin{array}{c|c} (P) & (\neg P) \\ \hline \{Q, \neg Q\} & \{\neg Q, Q\} \\ (Q) & (\neg Q) \\ \hline \{\perp\} & \{\perp\} \end{array} \end{array}$$

Esimerkki. Tutkitaan, onko lause $\phi =$

$$(R \rightarrow P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \wedge (Q \vee S) \wedge (S \rightarrow R) \rightarrow S \wedge R$$

pätevä.

1. Haetaan lauseen negaatiolle $\neg\phi$ klausuulimuoto $S =$

$$\{\neg R \vee P \vee Q, P \vee Q, \neg R \vee \neg Q, Q \vee S, \neg S \vee R, \neg S \vee \neg R\}$$

2. Muodostetaan DP-taulu (seuraava kalvo).
3. Epäonnistunut polku (klausuulijoukko tyhjä) antaa alkuperäiselle klausuulijoukolle mallin $\mathcal{A} = \{P, Q\}$.
4. Koska klausuulijoukko S on ekvivalentti lauseen $\neg\phi$ kanssa, alkuperäiselle lauseelle ϕ saatiin näin vastamalli \mathcal{A} .

6. Vertailu semanttisten taulujen kanssa

- Semanttisissa tauluissa ei käytetä haarautumissääntöä.
- DP-tauluilla voidaan simuloida polynomisesti klausuulijoukolle muodostettavaa semanttista taulua. Esimerkiksi

$$\begin{array}{ccc} T(L_1 \vee C_2) & & \{\dots, L_1 \vee C_2, \dots\} \\ / \quad \backslash & \mapsto & (L_1) \quad | \quad (\overline{L_1}) \\ TL_1 \quad TC_2 & & \{\dots, \dots\} \quad | \quad \{\dots, C_2, \dots\} \end{array}$$

- Semanttisella taululla ei voi simuloida polynomisesti DP-taulua. Esimerkki: $\{\neg P \vee Q, \neg Q \vee P, P \vee Q, \neg P \vee \neg Q\}$

☞ Davis-Putnam-menetelmä on vahvempi todistusmenetelmä kuin taulut ilman haarautumissääntöä.

- DP-taulusta muodostuu seuraava:

$$\{\neg R \vee P \vee Q, P \vee Q, \neg R \vee \neg Q, Q \vee S, \neg S \vee R, \neg S \vee \neg R\}$$

(peittosääntö)

$$\{P \vee Q, \neg R \vee \neg Q, Q \vee S, \neg S \vee R, \neg S \vee \neg R\}$$

(P)

$$\{\neg R \vee \neg Q, Q \vee S, \neg S \vee R, \neg S \vee \neg R\}$$

$$\begin{array}{c|c} (\neg R) & (R) \end{array}$$

$$\{Q \vee S, \neg S\} \quad | \quad \{\neg Q, Q \vee S, \neg S\}$$

$$\begin{array}{c|c} (\neg S) & (\neg Q) \end{array}$$

$$\{Q\} \quad | \quad \{S, \neg S\}$$

$$\begin{array}{c|c} (Q) & (S) \end{array}$$

$$\{\} \quad | \quad \{\perp\}$$

7. Menetelmän muunnelmia

- **Literaali epäonnistuu -sääntö:**

Jos tyhjä klausuuli saadaan joukosta $S \cup \{L\}$ käyttämällä yhden literaalin sääntöä, poistetaan kaikki klausuulit, joissa esiintyy \overline{L} ja muista klausuuleista literaali L .

- **Malliehto:** \overline{L} .

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee B, \neg B \vee C, \neg C \vee A\}$.

Yhden literaalin säännöllä:

$$S \cup \{\neg A\} \rightsquigarrow \{B, \neg B \vee C, \neg C\} \rightsquigarrow \{C, \neg C\} \rightsquigarrow \{\perp\}$$

Saadaan muunnettu klausuulijoukko $S = \{\neg B \vee C\}$.

Malliehto: A .

► **Literaali pari epäonnistuu -sääntö:**

Jos klausuulijoukosta $S \cup \{L_1, L_2\}$ saadaan käyttämällä yhden literaalin sääntöä \perp , lisäämään joukkoon S klausuuli $\overline{L_1} \vee \overline{L_2}$.

► **Poista 1-literaalit -sääntö:**

Literaali L esiintyy täsmälleen yhdessä S :n klausuulissa $L \vee C_0$ ja \overline{L} esiintyy k klausuulissa $\overline{L} \vee C_1, \dots, \overline{L} \vee C_k$.

Korvataan joukossa S em. $k+1$ klausuulia k klausuulilla $C_0 \vee C_1, \dots, C_0 \vee C_k$.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee C, \neg C \vee A\}$.

Yhden literaalin säännöllä:

$$S \cup \{\neg A, B\} \rightsquigarrow \{B, \neg B \vee C, \neg C\} \rightsquigarrow \{C, \neg C\} \rightsquigarrow \{\perp\}$$

Joten joukkoon S lisätään klausuuli $A \vee \neg B$.

Oppimistavoitteet

- Ymmärrät DP-menetelmän perusideat
- Hallitset keskeisten muunnossääntöjen käytön:
 - Milloin kutakin sääntöä voidaan soveltaa ?
 - Millaisia klausuulijoukkoja saadaan sääntöjä sovellettaessa ?
- Tunnet DP-taulujen perusominaisuuksia ja tiedät peruseron semanttiseen tauluun nähden
- Osaat ratkoa loogisia probleemoja DP-taulujen avulla