Davis-Putnam-menetelmän toteuttaminen

Käsiteltäviä asioita:

1. Toteutusten keskeisiä pirteitä
2. Esimerkkitoteutuksia: `ntab`, `relsat`, `satz` ja `chaff`
3. Vaikeiden k-SAT-ongelmien tuottaminen
4. Esimerkkitoteutusten vertailua

1. Toteutusten keskeisiä pirteitä

- Yksinkertaisuutensa vuoksi Davis-Putnam-menetelmä on toteutettavissa varsin suoraviivaisesti.
- Ylärajana hakuavaruuden koolle on 2^v (v on atomilauseiden lkm.).
- Käyttämällä syyvyyshakua algoritmi voidaan toteuttaa polynomisessa tilassa klausuulijoukon kokoon nähden.
- Jokaisessa hakuavaruuden pisteessä:
  (a) yksinkertaistetaan klausuulijoukkoa ja
  (b) valitaan uusi atomilause haarautumista varten.
- Hakuheuristiikka vaikuttaa suorituskykyyn olennaisesti.
- Pahimmassa tapauksessa algoritmin suoritus vaatii eksponentiaalisen ajan klausuulijoukon kokoon nähden.

Perusalgoritmi

Syöte: klausuulijoukko S ja literaalijoukko M (malliehdot).

function DP(S,M): literaalijoukko tai arvo 'UNSAT';
begin
  $\langle S', M' \rangle := \text{simplify}(S,M)$;
  if $S' = \emptyset$ **then** return M'
  else if $\bot \in S'$ **then** return 'UNSAT'
  else begin
    $L := \text{choose}(S', M')$;
    $M'' := \text{DP}(S' \cup \{L\}, M' \cup \{L\})$;
    if $M'' =$ 'UNSAT' **then** return $\text{DP}(S' \cup \{\overline{L}\}, M' \cup \{\overline{L}\})$
    else return M''
  end
end

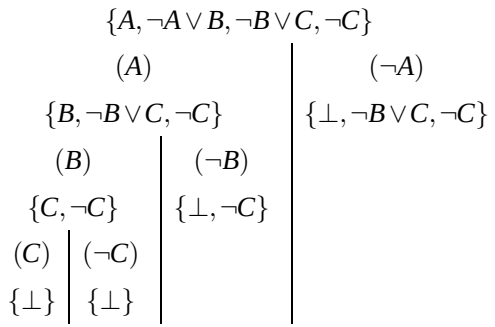
- Funktio simplify(S,M) pyrkii
  1. yksinkertaistamaan klausuulijoukkoa S ja
  2. täydentämään malliehtojen joukkoa M.
- Funktio choose(S,M) valitsee
  1. atomilauseen A haarautumissääntöä varten ja
  2. ensimmäisenä käsiteltävän malliehdon (A tai $\neg A$).
- Suorituskyky riippuu olennaisesti heuristiikasta.
- Kaupankäynti: yksinkertaistaminen vs. haarautuminen.
  - Yksinkertaistamisella voidaan vähentää haarautumistarvetta ja siten pienentää käsiteltävää hakuavaruutta.
  - Lineaarinen yksinkertaistaminen (esim. yhden literaalin sääntö) kannattaa tehdä jokaisessa hakuavaruuden pisteessä.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A, \neg A \vee B, \neg B \vee C, \neg C\}$.

- Kyseinen klausuulijoukko voidaan osoittaa toutetumattomaksi yhden literaalin säännöllä (malliehdot: A, B ja C).

$$S \rightsquigarrow \{B, \neg B \vee C, \neg C\} \rightsquigarrow \{C, \neg C\} \rightsquigarrow \{\bot\}$$

- Toteutumattomuus voidaan osoittaa myös haarautumissäännöllä:



Tyypillinen toteutus

1. Tehdään esikäsittely, jossa yksinkertaistetaan klausuulijoukkoa ja vähennetään muuttujien määrää (polynominen aikavaativuus) esim. käyttämällä yhden literaalin, komplementti puuttuu, literaali epäonnistuu ja poista 1-literaalit sääntöä.
2. Jokaisessa hakupisteessä yksinkertaistetaan klausuulijoukkoa (yhden literaalin sääntö ja joskus komplementti puuttuu -sääntö).
3. Kussakin hakupisteessä lasketaan heuristiikka (lasketaan literaalien esiintymistiheyksiä klausuuleissa ja/tai mitä johtopäätöksiä saataisiin yhden literaalin säännöllä).
4. Hakua voidaan edelleen tehostaa
   – käyttämällä oikaisevaa palautuvaa hakua (backjumping) ja
   – lisäämällä klausuuleja (rajoitettu oppiminen).

2. Esimerkkitoteutuksia

- `ntab`
  J.M. Crawford ja L.D. Auton [AIJ, 1996]: *Experimental Results on the Crossover Point in Random 3SAT*
- `relsat`
  R.J. Bayardo ja R.C. Schrag [AAAI, 1997]: *Using CSP Look-Back Techniques to Solve Real-World SAT Instances*
- `satz`
  C.M. Li [IPL, 1999]: *A Constraint-based Approach to Narrow Search Trees for Satisfiability*
- `chaff`
  M.M. Moskewicz, C.F. Madigan, Y. Zhao, L. Zhang ja S. Malik [DAC, 2001]: *Chaff: Engineering an Efficient SAT Solver*

Esimerkki: ntab

Funktion simplify(S, M) toteutus:

- Yksinkertaistetaan klausuulijoukkoa S ja laajennetaan malliehtojen joukkoa M käyttämällä yhden literaalin sääntöä (unit propagation).
- Yksinkertaistaminen voidaan toteuttaa lineaarisessa ajassa (Dowling-Gallier algoritmi).
- Samalla päivitetään heuristiikan laskennassa tarvittavia laskureita.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A, \neg A \vee \neg B, C \vee B, \neg C \vee B \vee \neg D \vee A\}$ ja $M = \emptyset$.

Yhden literaalin säännöllä saadaan malliehdot $M' = \{A, \neg B, C\}$ ja yksinkertaistettu klausuulijoukko $S' = \emptyset$.

Heuristiikka

Käytössä Freemanin [väitöskirja, s. 51] heuristinen funktio

$$H(A) = w(\neg A) * w(A) * 2^{10} + w(\neg A) + w(A) \qquad (1)$$

missä $w(L)$ on literaalin L esiintymien lukumäärä *avoimissa klausuuleissa* C (joiden toteutuminen ei vielä ole taattu).

- Tavoitteena on suosia atomisia lauseita A, joille $w(A) \neq 0$, $w(\neg A) \neq 0$ ja nämä luvut ovat suunnilleen saman suuruiset.
- Kahden vimeisen summatermin tarkoituksena on antaa järjestys tapauksille, joissa $w(A) = 0$ tai $w(\neg A) = 0$.
- Eksponentti (10) on valittu sanapituuden ja painojen maksimiarvojen perusteella sopivaksi.

Huomio. Paino $w(L)$ voidaan valita eri tavoin eri toteutuksissa!

Funktion choose(S,M) toteutus ntabissa:

1. Lasketaan jokaiselle *avoimelle* atomilauseelle A hyvyysluku $H(A)$ yhtälöllä (1), kun painona $w(L)$ on literaalin L esiintymien lukumäärä *avoimissa* binääriklausuuleissa.
2. Valitaan k parasta atomilausetta ($k = v - 21 * v'$, missä v' on niiden atomilauseiden lukumäärä, joilla on jo totuusarvo).
3. Lasketaan näille atomeille A uusi hyvyysluku $H'(A)$ yhtälöllä (1), kun literaalille L painona $w(L)$ on yhden literaalin säännöllä saatavien uusien (avointen) binääriklausuulien lukumäärä oletettaessa L.
4. Valitaan atomilause, jolla on paras hyvyysluku $H'(A)$.

Muuta huomion arvoista:

- *Oikaiseva* palautuva haku on toteutettu versiossa ntab_back.

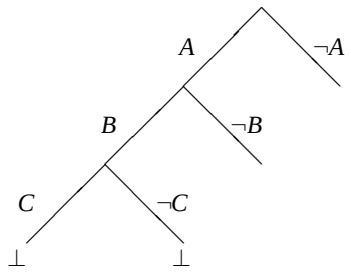
Esimerkki: relsat

- Funktio simplify(S,M) toteuttaa yhden literaalin säännön.
- Valintafunktio choose(S,M) eroaa hieman ntabin vastaavasta:
  - $H(A)$:n lausekkeesta (1) puuttuu kerroin $2^{10} = 1024$,
  - toiselle kierrokselle valitaan atomit A, joilla $H(A)$ poikkeaa korkeitaan 20% hyvyyslukujen maksimista,
  - näistä valitaan satunnaisesti jatkoon max. 10 atomia, ja
  - uuden hyvyysluvun $H'(A)$ laskennassa painona $w(L)$ on yhden literaalin säännöllä saatavien uusien literaalien lukumäärä oletettaessa L todeksi.
- Tämän lisäksi relsat sisältää toteutuksen oikaisevasta palautuvasta hausta (backjumping).

Esimerkki. Oikaiseva palautuva haku (backjumping):

Tarkastellaan klausuulijoukkoa $S =$

$$\{\ \neg A \vee D \vee E,\quad \neg A \vee \neg D \vee \neg E,\quad \neg C \vee \neg D,\quad \neg C \vee \neg E,$$
$$C \vee D,\quad C \vee E,\quad B \vee F,\quad B \vee G,$$
$$B \vee H,\quad \neg B \vee F,\quad \neg B \vee G,\quad \neg B \vee H\ \}$$



Oletuksila $\{A,B,C\}$ ja $\{A,B,\neg C\}$ saadaan johdetuksi tyhjä klausuuli $\perp$ kuuden ensimmäisen klausuulin avula. Tyhjän klausuulin $\perp$ johdot eivät siten riipu B:n arvosta.

Vaihtamala A:n arvo vältetään oletuksiin $\{A,\neg B\}$ liittyvä turha laskenta.

Esimerkki: satz

- Funktio simplify(S,M) toteuttaa yhden literaalin säännön.
- Heuristiikan choose(S,M) toteutus:
  1. Jokaiselle avoimelle atomilauseelle A lasketaan hyvyysluku $H(A)$ yhtälöllä (1), kun literaalin L painona $w(L)$ on yksinkertaistettavissa olevien klausuulien lukumäärä oletettaessa L todeksi.
  2. Valitaan atomi A, jolla on paras hyvyysluku $H(A)$.

Huomio. Heuristiikka ei ota kantaa literaalien A ja $\neg A$ käsittelyjärjestykseen: literaali A oletetaan aina ensin todeksi.

Parannuksia satzin perusversioon:

- Tuottetaan resoluutiolla klausuulijoukkoon korkeintaan kolmen literaalin mittaisia klausuuleja (lisärajoitteita).

  Esimerkki. Klausuuleista $A \vee B \vee C$ ja $\neg A \vee B \vee \neg D$ saadaan resoluutiolla $B \vee C \vee \neg D$.
- Literaalin L paino $w(L)$ on lausekkeiden $f(\overline{L_1}) + f(\overline{L_2})$ summa yli binääriklausuulien $L_1 \vee L_2$, jotka saadaan olettamalla L.

  Yllä $f(L)$ on literaalin L binääriklausuuliesiintymien lukumäärä (mikäli näitä on) tai summa painoista $5^{-(r-2)}$ jokaiselle L:n esiintymälle r:n mittaisessa klausuulissa.
- Lisänä 2-tasoinen *tähystys* (look-ahead): jos simplify$(S, M \cup \{L\})$ yksinkertaistaa riittävän montaa (parametri) klausuulia sekä simplify$(S, M \cup \{L, L_1\})$ ja simplify$(S, M \cup \{L, \overline{L_1}\})$ tuottavat ristiriidan jollekin L_1, päätellään $\overline{L}$.

Esimerkki: chaff

Funktion simplify(S,M) toteutus chaffissa:

- Perustuu yhden literaalin säännön nerokkaaseen toteutukseen.
- Jokaisesta klausuulista $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ (missä $n > 1$) nimetään aluksi kaksi *vahtiliteraalia* V_1 ja V_2 ($V_1 \neq V_2$).

  Jos V_1 (V_2) merkitään epätodeksi malliehdolla $\overline{V_1}$ ($\overline{V_2}$),
  1. korvataan V_1 (V_2) literaalilla $V \in \{L_1, \ldots, L_n\} - \{V_1, V_2\}$, joka ei ole epätosi senhetkisten malliehtojen nojalla, **tai**
  2. mikäli tämä ei ole mahdollista, päätellään malliehto V_2 (V_1) **tai** todetaan ristiriita (jos molemmat vahtiliteraalit ovat epätodet).
- Mahdollistaa klausuulijoukon yksinkertaistamisen *lineaarisessa* ajassa ja tehostaa palautuvaa hakua ja tähystystä, koska malliehdon L peruuttaminen voidaan toteuttaa *vakioajassa*.

Funktion choose(S,M) toteutus chaffissa:

1. Jokaisella literaalille L annetaan oma laskuri $c(L)$ (alussa 0).
2. Kun käsitellään klausuulia $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ kasvatetaan laskurien $c(L_1), \ldots, c(L_n)$ arvoja yhdellä.
3. Tietyin aikavälein laskurin arvot jaetaan jollain vakiolla.
4. Funktio choose(S,M) palauttaa satunnaisesti jonkin literaaleista L, joilla laskurin $c(L)$ arvo on suurin.

- **Erityispiirre I:** Havaittuja konflikteja kirjataan ylös klausuuleina.
  – Muistinkäyttöä hallitaan poistamalla näin opittuja klausuuleja myöhemmin laskennan aikana.
- **Erityispiirre II:** Laskenta saatetaan keskeyttää ja aloittaa alusta.
  – Mahdolliset opitut klausuulit kuitenkin säilytetään.
  – Menettelyn käyttö on rajoitettu täydellisyyden takaamiseksi.

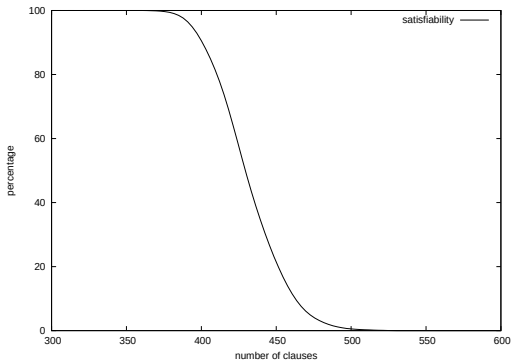
3. Vaikeiden k-SAT-ongelmien tuottaminen

Yksi mahdollisuus on tuottaa satunnaisia klausuulijoukkoja:

- Parametrit: atomisten lauseiden määrä v,
  literaalien määrä k jokaisessa klausuulissa
  klausuulien määrä c.
- Proseduuri: toistetaan c kertaa seuraava:
  1. Valitaan satunnaisesti k kpl atomisista lauseista $A_1, \ldots, A_v$.
  2. Muodostetaan näistä k:n literaalin klausuuli siten, että jokainen valituista muuttuja A_i kirjataan
     - positiiviseksi literaaliksi A_i todennäköisyydellä 0.5 ja
     - muutoin negatiiviseksi literaaliksi $\neg A_i$.

Vaikeimmat ongelmat faasitransitioalueella

- Esimerkiksi 3-SAT-ongelman vaikeimmat instanssit saadaan tuottamalla klausuulijoukkoja, joilla suhde $\frac{c}{v}$ on noin 4,3.



- Faasitransitiopisteessä ongelmien instanssi muuttuvat äkillisesti toteutuvista toteutumattomiksi.

4. Esimerkkitoteutusten vertailua

- `relsat` on nopeampi kuin `posit` [Freeman] ja `ntab`.
  - Logistiikkaan ja suunnitteluun liittyviä esimerkkejä: `relsat` (4s – 813s) vs. `ntab_back` (17s – yli 12h).
  - Joillain esimerkeillä jopa parempi kuin paikalliset hakumenetelmät, muilla taas selvästi huonompi.
- `satz` on joskus nopeampi kuin `ntab` ja `relsat`.
  - 400 muuttujan satunnaiset 3SAT-ongelmat faasitransitio-alueelta: `satz` (1825s) vs. `posit` (4872s) vs. `ntab` (7362s).
- `chaff` on vielä kertaluokkaa (tai kahta) nopeampi ja kilpailukykyinen jopa paikallisten hakumenetelmien kanssa.

Keskitetty vertailu (Laurent Simon)

- Käytössä 1303 testiongelmaa, joilla testattu 23:a toteutusta.

Toteutus	Ajankäyttö	Suht. "hitaus"	Onnist. testit	Testien lkm.
zchaff	2d 22h 52m 29s	1.00	1280	1303
relsat-200	5d 19h 20m 50s	1.97	1260	1303
relsat	7d 09h 33m 20s	2.51	1243	1303
sato	8d 09h 35m 12s	2.84	1241	1303
satz-215	8d 22h 48m 56s	3.03	1237	1303
eqsatz	9d 00h 06m 08s	3.05	1237	1303
satz-213	9d 15h 18m 16s	3.26	1232	1303
sato-3.2.1	10d 09h 52m 52s	3.53	1221	1303
satz	10d 12h 59m 23s	3.57	1211	1303

Linkkejä

Edellä käsiteltyjen toteutusten lähdekoodit ovat saatavilla verkossa:

- ntab: `http://www.cirl.uoregon.edu/crawford/`
- relsat: `http://www.almaden.ibm.com/cs/people/bayardo/`
- satz: `http://www.laria.u-picardie.fr/~cli/`
- chaff: `http://www.ee.princeton.edu/~chaff/`

Muuta mielenkiintoista:

- Kattava kokoelma linkkejä: `http://www.satlive.org/`
- Vertailuja: `http://www.lri.fr/~simon/satex/satex.php3` ja `http://www.satlive.org/SATCompetition/2004/`

Oppimistavoitteet

- Ymmärrät DP-menetelmän algoritmisen esitystavan
- Tunnet heuristiikan merkityksen hakualgoritmin tehokkuudelle
- Tiedät mistä tehokkaimmat toteutukset ovat saatavissa
- Osaat ratkoa loogisia tehtäviä näiden työkalujen avulla
- Kokeilet itsenäisesti muutaman työkalun käyttöä