Davis-Putnam-menetelmä

- Tehokkaimmat nykyiset lauselogiikan ratkaisumenetelmät pohjautuvat *DP-menetelmään* [Davis-Logemann-Loveland, 1962], jota usein (hieman epätarkasti) kutsutaan Davis-Putnam-menetelmäksi [1960].
- Kysymyksessä ns. refutaatiomenetelmä: lause P todistetaan aloittamalla lauseesta $\neg P$ ja johtamalla ristiriita:

  Lause $\neg P$ muunnetaan klausuulijoukoksi (konjunktiivinen normaalimuoto), joka osoitetaan toteutumattomaksi.
- Menetelmällä voidaan myös hakea klausuulijoukolle mallia/malleja.
- Täydellinen menetelmä: päättää jokaisen klausuulijoukon osalta, onko joukko toteutuva vai ei.

Perusidea[a]

- Klausuulijoukon S toteutuvuutta tutkitaan muodostamalla *DP-taulu*, joka on rakenteeltaan puu, jonka juurisolmuna on S.
- Kunkin taulun solmun (klausuulijoukon) lapsisolmut saadaan muuntamalla ko. solmua muunnossäännöillä.
- Muunnokset säilyttävät toteutuvuuden:

  Jos solmu (klausuulijoukko) on toteutuva, ainakin yksi sen muunnoksella saaduista lapsista on myös toteutuva.
- Klausuulijoukkoja muunnetaan, kunnes on ilmeistä, ovatko ne toteutuvia vai ei (eliminoimalla toteutuneet klausuulit ja muista klausuuleista epätodet literaalit):

  (i) Tyhjä klausuulijoukko on toteutuva.

  (ii) Tyhjän klausuulin sisältävä klausuulijoukko ei ole toteutuva.

Määritelmiä

- Literaalin L *komplementti* $\overline{L}$:

  Olkoon A atomilause. $\overline{A} = \neg A$ ja $\overline{\neg A} = A$.
- *Tyhjä klausuuli*: $\perp$

  Esim. Jos klausuulista $A \vee \neg B$ poistetaan literaalit A ja $\neg B$, jäljelle jää tyhjä klausuuli $\perp$.

  Tyhjä klausuuli $\perp$ on jokaisessa mallissa epätosi.
- Klausuulijoukon esikäsittely:

  (i) Poistetaan kustakin klausuulista moneen kertaan esiintyvät literaalit.

  (ii) Poistetaan *tautologiset* (aina todet) klausuulit, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti.

Muunnossäännöt

- **Yhden literaalin sääntö (One-literal rule):**

  Olkoon klausuulijoukossa S yhden literaalin klausuuli L.

  Muunnetaan S poistamalla

  (i) kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L ja

  (ii) muista klausuuleista literaali $\overline{L}$ (yksikköresoluutio).
- *Malliehto:* L tosi.

Esimerkki. Olkoon $S = \{\neg A, A \vee B \vee C, \neg A \vee D\}$.

Yhden literaalin sääntö muuntaa joukon S muotoon $\{B \vee C\}$.

Malliehto: $\neg A$ tosi.

- **Komplementti puuttuu -sääntö (Affirmative-negative rule):**

  Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalin L muttei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalin $\overline{L}$.

  Muunnetaan S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L.

- *Malliehto:* L tosi.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee \neg C\}$.

Komplementti puuttuu -sääntö muuntaa joukon S muotoon $\{\neg A \vee \neg C\}$.

Malliehto: $\neg B$ tosi.

- **Peittosääntö (Subsumption rule):**

  Olkoon klausuulijoukossa S klausuulit C_1 ja C_2 siten, että C_2 *peittää* klausuulin C_1 (jokainen klausuulin C_1 literaali esiintyy myös klausuulissa C_2).

  Muunnetaan S poistamalla C_2.

- *Ei malliehtoa!*

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Peittosääntö muuntaa joukon S muotoon

$\{A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Ei malliehtoa.

- **Haarautumissääntö (Splitting rule):**

  Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalin L ja klausuuli, joka sisältää literaalin $\overline{L}$.

  Muunnetaan S kahdeksi joukoksi S_L ja $S_{\overline{L}}$.

- S_L saadaan joukosta S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L ja muista klausuuleista literaali $\overline{L}$

  Malliehto: L tosi.

- $S_{\overline{L}}$ saadaan joukosta S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin $\overline{L}$ ja muista klausuuleista literaali L

  Malliehto: $\overline{L}$ tosi.

Esimerkki. Joukosta $S = \{A \vee \neg B \vee \neg C,\ \neg A \vee \neg B\}$ saadaan:

$S_A = \{\neg B\}$ (malliehto: A tosi) ja

$S_{\neg A} = \{\neg B \vee \neg C\}$ (malliehto: $\neg A$ tosi).

DP-taulut

DP-taulut määritellään seuraavaan tapaan rekursiivisesti:

Määritelmä. Puu T, jonka solmuina on klausuulijoukkoja ja jonka solmujen asteluku on korkeintaan kaksi, on DP-taulu $\iff$

1. T:n ainoana solmuna (eli sekä juuri- että lehtisolmuna) on mikä tahansa klausuulijoukko S; tai
2. T' on DP-taulu ja T saadaan soveltamalla johonkin T':n lehtisolmuna olevaan klausuulijoukkoon S muunnossääntöä ja liittämällä syntyvät 1 tai 2 klausuulijoukkoa solmun S lapsiksi.

Malliehdot kirjataan kunkin solmun lapsisolmuihin johtaville kaarille.

Polkuja koskevia määritelmiä

Olkoon T DP-taulu ja P jokin taulun T *polku* juurisolmusta S lehtisolmuun S'. Polkua P kutsutaan

1. *onnistuneeksi*, jos $\perp \in S'$, ja
2. *epäonnistuneeksi*, jos $S' = \emptyset$.

Vastaavasti, taulu T on

1. *valmis*, jos sen kaikki polut ovat joko onnistuneita tai epäonnistuneita, ja
2. *onnistunut*, jos sen kaikki polut ovat onnistuneita.

DP-johtojen ominaisuudet I

Väite. Olkoon S äärellinen klausuulijoukko ja T juurisolmusta S modostettu DP-taulu. Tällöin

S on toteutuva $\Longrightarrow$ jokin taulun T lehtisolmuista on toteutuva.

Todistus. Väite pitää paikansa, jos S on taulun T ainoa solmu (sekä juuri- että lehtisolmu).

Muussa tapauksessa T on muodostettu DP-taulusta T' liittämällä siihen lapsisolmu(t) S'_1 (ja S'_2). Induktio-oletuksen nojalla taulussa T' on lehtisolmu S' joka on toteutuva.

1. Jos S' on S'_1:n (ja S'_2) isäsolmu, klausuulijoukko S'_1 (tai S'_2) on toteutuva, koska *muunnossäännöt säilyttävät toteutuvuuden*.
2. Muutoin S' on toteutuva ja myös T:n lehtisolmu.

Esimerkki. Oletetaan, että klausuulijoukosta S saadaan haarautumissäännöllä S_L ja $S_{\overline{L}}$. Nyt S on toteutuva $\Longleftrightarrow$ S_L on toteutuva tai $S_{\overline{L}}$ on toteutuva.

Väite. Olkoon S äärellinen klausuulijoukko. Juurisolmusta S muodostettu DP-taulu T on aina äärellinen ja saatettavissa valmiiksi.

Todistus. Sääntöjä voidaan soveltaa vain äärellisen monta kertaa, koska S on äärellinen ja jokainen muunnossääntö vähentää atomilauseiden määrää tai klausuulien määrää (peittosääntö). Näin DP-taulu muodostuu aina äärelliseksi.

Oletetaan, että taulun T polku P (juurisolmusta S lehtisolmuun S') ei ole onnistunut eikä epäonnistunut. Tällöin $S' \neq \emptyset$ ja $\perp \notin S'$.

Taulun konstruointia voidaan jatkaa valitsemalla klausuuli $C \in S'$ ja C:n literaali L. Jos literaali $\overline{L}$ esiintyy S':ssä, voidaan käyttää haarautumissääntöä, muutoin komplementti puuttuu -sääntöä.

DP-taulujen ominaisuudet II

Teoreema. Olkoon S äärellinen klausuulijoukko ja T mikä tahansa juurisolmusta S muodostettu valmis DP-taulu.

Tällöin S on toteutumaton $\Longleftrightarrow$ T on onnistunut.

Todistus. Jos S on toteutuva, niin taulussa T on välttämättä lehtisolmu S', joka on toteutuva (osoitettiin edellä). Koska T on valmis, ainoana mahdollisuutena on $S' = \emptyset$, joten T on epäonnistunut.

Jos T on epäonnistunut, sillä on polku P, jonka lehtisolmulle S' pätee $S' = \emptyset$. Valitsemalla totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että

1. $A \in \mathcal{A}$, jos polulla P on malliehto A, ja
2. $A \notin \mathcal{A}$, jos polulla P on malliehto $\neg A$,

saadaan polulla P esiintyville klausuulijoukoille (S mukaanlukien) malli.

DP-taulujen ominaisuudet III

➤ Vaika DP-tauluissa käytettävät muunnossäännöt säilyttävät toteutuvuuden, klausuulijoukkojen mallit eivät välttämättä säily.

➤ Erityisesti komplementti puuttuu -sääntö sulkee pois malleja.

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa $S = \{A \vee B\}$.

1. Soveltamalla komplementti puuttuu -sääntöä A:n suhteen, saadaan klausuulijoukoksi $S' = \emptyset$ ja malliehdoksi A.
2. Koska lopputuloksena on tyhjä klausuulijoukko, malliehdon A nojalla klausuulijoukolle S voidaan muodostaa kaksi mallia $M_1 = \{A\}$ ja $M_2 = \{A, B\}$.
3. Klausuulijoukolla on kuitenkin kolmas malli $M_3 = \{B\}$.

DP-todistukset

Määritelmä. Lauseen P DP-todistus on *onnistunut* DP-taulu T, jonka juurisolmuna on lausetta $\neg P$ vastaava klausuulijoukko S.

Huomio. Vastaava epäonnistunut DP-taulu antaa lauseelle P vastamallin ($\not\models P$): valitaan epäonnistunut polku P ja totuusjakelu $\mathcal{A}$ esim. siten, että $A \in \mathcal{A} \iff$ malliehto A esiintyy polulla P.

Teoreema. DP-todistusten *virheettömyys* ja *täydellisyys:*
Lause P on pätevä $\iff$ lauseella P on DP-todistus.

Todistus. Lause P pätevä
$\iff$ lauseen $\neg P$ klausuulimuoto S on toteutumaton
$\iff$ juurisolmusta S muodostettu valmis DP-taulu on onnistunut
$\iff$ lauseella P on DP-todistus.

Esimerkki. Todistetaan lause $\phi =$
$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P \wedge Q.$$

1. Muunnos klausuulimuotoon:
$$\begin{aligned} \neg\phi &\rightsquigarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \\ &\rightsquigarrow \{\neg P \vee Q,\ \neg Q \vee P,\ P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q\}. \end{aligned}$$
2. Muodostetaan onnistunut DP-taulu (malliehdot annettu suluissa):

$$\begin{array}{c} \{\neg P \vee Q,\ \neg Q \vee P,\ P \vee Q,\ \neg P \vee \neg Q\} \\ \begin{array}{c|c} (P) & (\neg P) \\ \{Q, \neg Q\} & \{\neg Q, Q\} \\ (Q) & (\neg Q) \\ \{\bot\} & \{\bot\} \end{array} \end{array}$$

Esimerkki. Tutkitaan, onko lause $\phi =$
$$(R \rightarrow P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (R \rightarrow \neg Q) \wedge (Q \vee S) \wedge (S \rightarrow R) \rightarrow S \wedge R$$
pätevä.

1. Haetaan lauseen negaatiolle $\neg\phi$ klausuulimuoto $S =$
$$\{\neg R \vee P \vee Q,\ P \vee Q,\ \neg R \vee \neg Q,\ Q \vee S,\ \neg S \vee R,\ \neg S \vee \neg R\}$$
2. Muodostetaan DP-taulu (seuraava kalvo).
3. Epäonnistunut polku (klausuulijoukko tyhjä) antaa alkuperäiselle klausuulijoukolle mallin $\mathcal{A} = \{P, Q\}$.
4. Koska klausuulijoukko S on ekvivalentti lauseen $\neg\phi$ kanssa, alkuperäiselle lauseelle ϕ saatiin näin vastamalli $\mathcal{A}$.

- DP-taulusta muodostuu seuraava:

$$\{\neg R\vee P\vee Q,\ P\vee Q,\ \neg R\vee\neg Q,\ Q\vee S,\ \neg S\vee R,\ \neg S\vee\neg R\}$$

(peittosääntö)

$$\{P\vee Q,\ \neg R\vee\neg Q,\ Q\vee S,\ \neg S\vee R,\ \neg S\vee\neg R\}$$

$$(P)$$

$$\{\neg R\vee\neg Q,\ Q\vee S,\ \neg S\vee R,\ \neg S\vee\neg R\}$$

$$\begin{array}{c|c}
(\neg R) & (R) \\
\{Q\vee S,\ \neg S\} & \{\neg Q,\ Q\vee S, \neg S\} \\
(\neg S) & (\neg Q) \\
\{Q\} & \{S, \neg S\} \\
(Q) & (S) \\
\{\} & \{\perp\}
\end{array}$$

DP-taulut vs. semanttiset taulut

- Semanttisissa tauluissa ei käytetä haarautumissääntöä.
- DP-tauluilla voidaan simuloida polynomisesti klausuulijoukolle muodostettavaa semanttista taulua. Esimerkiksi

$$\begin{array}{ccc}
 & T(L_1\vee C_2) & \\
 & / \qquad \backslash & \\
 & TL_1 \qquad TC_2 &
\end{array}
\quad\mapsto\quad
\begin{array}{c}
\{\ldots, L_1\vee C_2, \ldots\} \\
\begin{array}{c|c}
(L_1) & (\overline{L_1}) \\
\{\ldots, \ldots\} & \{\ldots, C_2, \ldots\}
\end{array}
\end{array}$$

- Semanttisella taululla ei voi simuloida polynomisesti DP-taulua. Esimerkki: $\{\neg P\vee Q,\ \neg Q\vee P,\ P\vee Q,\ \neg P\vee\neg Q\}$

☞ Davis-Putnam-menetelmä on vahvempi todistusmenetelmä kuin taulut ilman haarautumissääntöä.

Muita sääntöjä

- **Literaali epäonnistuu -sääntö:**

  Jos tyhjä klausuuli saadaan joukosta $S\cup\{L\}$ käyttämällä yhden literaalin sääntöä, poistetaan kaikki klausuulit, joissa esiintyy $\overline{L}$ ja muista klausuuleista literaali L.

- *Malliehto:* $\overline{L}$.

Esimerkki. Olkoon $S=\{A\vee B,\ \neg B\vee C,\ \neg C\vee A\}$.

Yhden literaalin säännöllä:

$S\cup\{\neg A\}\rightsquigarrow\{B,\ \neg B\vee C,\ \neg C\}\rightsquigarrow\{C,\ \neg C\}\rightsquigarrow\{\perp\}$

Saadaan muunnettu klausuulijoukko $S=\{\neg B\vee C\}$.

Malliehto: A.

- **Literaalipari epäonnistuu -sääntö:**

  Jos klausuulijoukosta $S\cup\{L_1, L_2\}$ saadaan käyttämällä yhden literaalin sääntöä $\perp$, lisätään joukkoon S klausuuli $\overline{L_1}\vee\overline{L_2}$.

- **Poista 1-literaalit -sääntö:**

  Literaali L esiintyy täsmälleen yhdessä S:n klausuulissa $L\vee C_0$ ja $\overline{L}$ esiintyy k klausuulissa $\overline{L}\vee C_1, \ldots, \overline{L}\vee C_k$.

  Korvataan joukossa S em. $k+1$ klausuulia k klausuulilla $C_0\vee C_1, \ldots, C_0\vee C_k$.

Esimerkki. Olkoon $S=\{A\vee\neg B\vee C, \neg C\vee A\}$.
Yhden literaalin säännöllä:

$S\cup\{\neg A, B\}\rightsquigarrow\{B, \neg B\vee C, \neg C\}\rightsquigarrow\{C, \neg C\}\rightsquigarrow\{\perp\}$

Joten joukkoon S lisätään klausuuli $A\vee\neg B$.