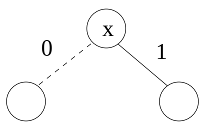
Binäriset päätösdiagrammit

- Binäärinen päätösdiagrammi (binary decision diagram; BDD): Boolen funktion esitys graafina [Le, 1950; Akers, 1978].
- Ottamalla käyttöön järjestys Boolen funktion muuttujille saadaan *järjestetty binäärinen päätösdiagrammi* (ordered binary decision diagram OBDD) [Bryant, 1986], joka tarjoaa Boolen funktioille kanonisen esitystavan.
- OBD-tekniikalla pystytään käsittelemään suuria sovellutuksissa esintyviä Boolen funktioita (digitaaliset piirit, tilakoneet, ...)

Binärinen päätösdiagrammi

- Esittää Boolen funktioita asyklisina suunnattuna graafina.
- Jokaisella ei-terminaalisolmulla v:
  - nimetty muuttuja $\mathrm{var}(v)$
  - $\mathrm{lo}(v)$: lapsisolmu, kun $\mathrm{var}(v) = 0$
  - $\mathrm{hi}(v)$: lapsisolmu, kun $\mathrm{var}(v) = 1$



- Jokainen terminaalisolmu: nimetty joko 0 tai 1
- Jokaisella muuttujien arvojen yhdistelmällä funktion arvo saadaan vastaavasta lehtisolmusta.

Redusoitu järjestetty binäärinen päätösdiagrammi (ROBDD)

Valitaan muuttujille täydellinen järjestys $<$. Jokaisen solmun u ja u:n ei-terminaali lapsen v tulee toteuttaa vaatimus $\mathrm{var}(u) < \mathrm{var}(v)$.

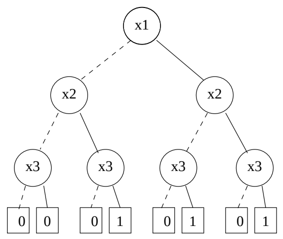
Reduktiosäännöt:

- Poistetaan terminaalien kopiot:
  Hävitetään terminaalisolmun 0/1 kopiot yhtä lukuunottamatta ja siirretään poistettuihin kopioihin tulleet kaaret jäljelle jäävään.
- Poistetaan ei-terminaalien kopiot:
  Jos ei-terminaalisolmuille v ja u pätee $\mathrm{var}(v) = \mathrm{var}(u)$, $\mathrm{hi}(v) = \mathrm{hi}(u)$ ja $\mathrm{lo}(v) = \mathrm{lo}(u)$, hävitetään toinen solmuista ja siirretään siihen tulevat kaaret toiseen solmuun.
- Poistetaan tarpeettomat testit:
  Jos ei-terminaalisolmulle v pätee $\mathrm{hi}(v) = \mathrm{lo}(v)$, hävitetään v ja siirretään siihen tulevat kaaret solmuun $\mathrm{lo}(v)$.

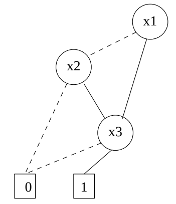
Esimerkki.

$x1$	$x2$	$x3$	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Funktio f



BDD



Redusoitu OBDD

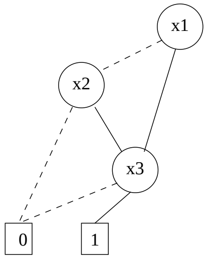
BDD:t ohjelmina

- BDD:t vastaavat yksinkertaisia *haarautuvia ohjelmia* (branching programs):

```
if x then ... /* x=1 -haara */
else ... /* x=0 -haara */
```

- Esimerkiksi edellinen redusoitu OBDD:

```
if x1 then
    return x3
else if x2 then
    return x3
else return 0
endif
```



Kanoninen esitystapa

- ROBDD (*maksimaalisesti redusoitu järjestetty* BDD) antaa kanonisen (yksikäsitteisen) esitystavan Boolen funktiolle.
- Kaikki annettua Boolen funktiota f esittävät ROBDD:t ovat *isomorfisia* seuraavalla tavalla.

  Määritelmä. BDD:t B_1 ja B_2 ovat isomorfisia, joss on olemassa bijektiivinen funktio f graafin B_1 solmuilta graafin B_2 solmuille siten, että kaikille graafin B_1 solmuille v pätee: jos $f(v) = v'$, joko

  (i) sekä v että v' ovat terminaalisolmuja, joilla on sama arvo tai

  (ii) sekä v että v' ovat ei-terminaalisolmuja siten, että $\mathrm{var}(v) = \mathrm{var}(v')$, $f(\mathrm{lo}(v) = \mathrm{lo}(v')$ ja $f(\mathrm{hi}(v) = \mathrm{hi}(v')$.
- BD-isomorfia on suoraviivainen tarkistaa.

Loogiset päättelyongelmat

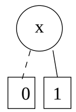
- *Looginen ekvivalenssi:* lauseiden ROBDD:t isomorfiset.
- *Toteutuvuus:* lauseen ROBDD ei ole isomorfinen funktion $\mathbf{0}$ ROBDD:n (terminaalisolmusta 0 koostuva yksisolmuinen BDD) kanssa.
- *Pätevyys:* lauseen ROBDD on isomorfinen funktion $\mathbf{1}$ ROBDD:n (terminaalisolmusta 1 koostuva yksisomuinen BDD) kanssa.
- *Looginen seuraavuus:* $\{P\} \models Q \iff$ lauseen $\neg P \vee Q$ ROBDD on isomorfinen funktion $\mathbf{1}$ graafin kanssa.

Huomio. Muistanet seuraavat yhteydet:

$$\{P\} \models Q \iff \models P \rightarrow Q \iff \models \neg P \vee Q.$$

OBDD:n rakentaminen

- Kootaan vaiheittain operaattoreilla alkaen
  (a) vakiofunktioiden $\mathbf{0}$ ja $\mathbf{1}$ graafeista $\boxed{0}$ ja $\boxed{1}$ sekä
  (b) muuttujia esittävistä graafeista:



- Tyypillisiä operaattoreita:
  — $\mathrm{Apply}(\mathrm{op}, f, g)$: $f \,\mathrm{op}\, g$
  — $\mathrm{Restrict}(f, x_i, k)$: $f_{x_i \leftarrow k}(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, k, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Esimerkki. $f \wedge q$ ja $f \oplus g$, missä $\oplus$ on poissulkeva disjunktio.

Esimerkki. $(x \wedge y)_{x \leftarrow 0} = \mathbf{0}$, $(x \wedge y)_{x \leftarrow 1} = y$

Muita operaattoreita

- if-then-else: $\mathrm{Ite}(f,g,h) = (f \wedge g) \vee (\neg f \wedge h)$
- Komplementti: $\neg f = f \oplus \mathbf{1}$
- Kompositio:
  $f_{x_i \leftarrow g}(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},g(x_1,\ldots,x_n),x_{i+1},\ldots,x_n)$

$$f_{x\leftarrow g} = (\neg g \wedge f_{x\leftarrow 0}) \vee (g \wedge f_{x\leftarrow 1})$$

- Kvantifiointi:

$$\exists x f = f_{x\leftarrow 0} \vee f_{x\leftarrow 1}$$

$$\forall x f = f_{x\leftarrow 0} \wedge f_{x\leftarrow 1}$$

Toteutustekniikkaa

- Operaatiot Boolen funktioille voidaan toteuttaa graafialgoritmeilla funktioiden OBDD-esityksille siten, että muuttujien järjestys säilyy ja tuloksena on täysin redusoitu OBDD tulosfunktiolle.
- Riittäisi toteuttaa $\mathrm{Apply}(\cdot)$ ja $\mathrm{Restrict}(\cdot)$ mutta tehokkuussyistä toteutetaan suoraan usein myös esim. kompositio ja if-then-else.
- $\mathrm{Restrict}(f,x,k)$

  Lasketaan muuttamalla funktion f OBD-esitystä siten, että siirretään kuhunkin solmuun v, jolle $\mathrm{var}(v) = x$, tulevat kaaret suoraan solmuun $\mathrm{lo}(v)$, jos $k = 0$ ja solmuun $\mathrm{hi}(v)$, jos $k = 1$.

  Samalla redusoidaan tulosgraafi suoraan käyttäen annettuja redusointisääntöjä.

$\mathrm{Apply}(\mathrm{op}, f, g)$:

- Toteutetaan syvyyssuuntaisesti funktioiden f ja g graafeille.
- Perustuu operaattorin op seuraavaan ominaisuuteen

$$f \,\mathrm{op}\, g = (\neg x \wedge (f_{x\leftarrow 0} \,\mathrm{op}\, g_{x\leftarrow 0})) \vee (x \wedge (f_{x\leftarrow 1} \,\mathrm{op}\, g_{x\leftarrow 1}))$$

- ja OBDD-esityksen ominaisuuteen: jos r_f on funktion f OBDD:n juurisolmu ja $x \leq \mathrm{var}(r_f)$,

$$f_{x\leftarrow b} = \begin{cases} r_f, & x < \mathrm{var}(r_f) \\ \mathrm{lo}(r_f), & x = \mathrm{var}(r_f) \text{ and } b = 0 \\ \mathrm{hi}(r_f), & x = \mathrm{var}(r_f) \text{ and } b = 1 \end{cases}$$

- Redusoitu OBDD voidaan laskea sovellettaessa operaattoria op.
- Optimoidaan huomioimalla dominoivat arvot. Esim. $f \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Laskennallinen vaativuus

- OBD-operaatiot voidaan suorittaa polynomisessa ajassa argumentteina olevien OBDD:den solmujen määrän suhteen.

$\mathrm{Apply}(\mathrm{op}, f, g)$	$O(m_f m_g)$
$\mathrm{Restrict}(f,x,k)$	$O(m_f)$
Kompositio $f_{x\leftarrow g}$	$O(m_f^2 m_g)$
Kvantifiointi	$O(m_f^2)$

missä m_f ja m_g ovat funktioiden f ja g OBD-esityksen solmujen määrät.

- Tuloksena syntyvän OBDD:n koko on polynominen argumenttien kokojen suhteen.

Muuttujien järjestyksen vaikutus

- ROBDD:n koko ja muoto riippuvat muuttujien järjestyksestä.
- On olemassa funktioita, joilla ROBDD:n koko vaihtelee polynomisesta eksponentiaaliseen (muuttujien määrän suhteen) riippuen muuttujien järjestyksestä.

Esimerkki. Tarkastellaan lausetta $(a_1 \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a_n \wedge b_n)$.

1. Järjestyksellä $a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_n$ saadaan $2n$ ei-terminaalisolmua.
2. Järjestyksellä $a_1 < \cdots < a_n < b_1 < \cdots < b_n$ saadaan $2(2^n - 1)$ ei-terminaalisolmua.

OBDD:n koko eräillä funktioluokilla:

Funktio	Koko	
	paras	huonoin
Symmetriset funktiot	lineaarinen	neliöllinen
Kokonaislukuyhteenlasku (mikä tahansa bitti)	lineaarinen	eksponentiaalinen
Kokonaislukukertolasku (keskibitit)	eksponentiaalinen	eksponentiaalinen

- Esim. 15-bittisen kertolaskupiirin OBDD:
  yli $12 \cdot 10^6$ solmua (0.26 GB muistia).
  Kukin lisäbitti nostaa solmujen määrän n. 2.7-kertaiseksi.
- Heuristiikkoja hyvän muuttujajärjestyksen löytämiseksi.
- Muuttujajärjestystä voidaan muuttaa dynaamisesti.

Toteutusten ominaispiirteitä

- OBD-toteutukset perustuvat dynaamiseen (ei-paikalliseen) muistin käyttöön.
- Tarvitaan paljon fyysistä muistia ja hyvät muistihallintamenetelmät.
- Hajautustaulut keskeinen osa tehokasta toteutustekniikkaa.
- Vaikea rinnakkaistaa.
- Tyypillisesti toteutettu (C-)kirjastona.

Sovellutuksia

- Loogiset tehtävät (toteutuvuus, pätevyys, looginen seuraavuus, kaikki mallit, mallien lukumäärä, . . .).
- Digitaalisten piirien suunnittelu

  Verifiointi: Kahden piirin (esim. piirin määrittely ja toteutus) ekvivalenssin testaus.

  Piirin OBDD muodostetaan lähtemällä input-signaaleista ja "tulkkaamalla piiriä symbolisesti" (operaatio $\mathrm{Apply}(\cdot)$:

  Jos komponentin input-signaaleille s_1 ja s_2 on laskettu funktiot f_1 ja f_2 ja komponentti suorittaa operaation $s_1 \,\mathrm{op}\, s_2$, tällöin komponentin output-signaalille saadaan funktio $\mathrm{Apply}(\mathrm{op}, f_1, f_2)$.

Joukkojen käsittely

- Äärellinen joukko voidaan koodata vektoriksi binääriarvoja.
  Olkoon A äärellinen joukko s.e. $|A| = N$.
  Tarvitaan $n = \lceil \log_2 N \rceil$ binääriarvoa.
  Joukon A koodausfunktio $\sigma : A \to \{0,1\}^n$
  $\sigma_i(a)$ on a:n koodauksen i:s jäsen.
  Usein on olemassa luonnollinen koodaus, esim. kokonaisluvut.

Joukko-operaatioiden esittäminen

- Olkoon A joukko, jolla on binäärikoodausfunktio σ.
  A:n alijoukkoja voidaan esittää karakteristisillä funktioilla.
  Joukolle $S \subseteq A$ funktio $\chi_S : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ missä

$$\chi_S(\vec{x}) = \bigvee_{a \in S} \bigwedge_{1 \le i \le n} \neg(x_i \oplus \sigma_i(a))$$

- Näin joukko-operaatiolle saadaan seuraavat esitykset:

$$\begin{aligned} \chi_\emptyset &= \mathbf{0} \\ \chi_{S \cup T} &= \chi_S \vee \chi_T \\ \chi_{S \cap T} &= \chi_S \wedge \chi_T \\ \chi_{S-T} &= \chi_S \wedge \neg\chi_T \end{aligned}$$

- $S \subseteq T$ joss $S - T = \emptyset$ joss $\chi_S \wedge \neg\chi_T = \mathbf{0}$.

Tilakoneiden analyysi

(Hajautetut järjestelmät, protokollat, sekvenssipiirit ...)

- Tilat ja syöteaakkosto koodataan binäärisesti.
- Siirtymärelaatio koodataan binäärisesti karakteristisella funktiolla $\delta(\vec{x}, \vec{o}, \vec{n})$, joka saa arvon 1 joss syötteellä $\vec{x}$ tapahtuu siirtymä tilasta $\vec{o}$ tilaan $\vec{n}$.
- Saavutettavuusanalyysi voidaan tehdä symbolisesti.
- Joskus voidaan analysoida järjestelmiä, joiden tilavaruus on valtava (yli 10^{20} tilaa).

Symbolinen saavutettavuusanalyysi

- Relaatio S: siirtymä tilasta $\vec{o}$ tilaan $\vec{n}$ jollakin syötteellä.
  Karakteristinen funktio: $\chi_S(\vec{o}, \vec{n}) = \exists \vec{x} \delta(\vec{x}, \vec{o}, \vec{n})$
- $R(\vec{s})$ (saavutettava tilat tilasta $\vec{q}$): $\chi_R(\vec{s}) = \chi_{S^*}(\vec{q}, \vec{s})$
  missä S^* on relaation S transitiivinen sulkeuma.
- χ_{S^*} voidaan laskea iteratiivisesti käyttäen identiteettirelaatiota (I) ja relaatioiden kompositiota ($\circ$).
- Relaatioiden kompositio: $\chi_{R \circ S} = \exists z(\chi_R(x,z) \wedge \chi_S(z,y))$

- Transitiivinen sulkeuma saadaan, kun sarja

$$S_0 = I$$
$$S_{i+1} = I \cup (S \circ S_i)$$

suppene, t.s. löytyy i, jolle $S_i = S_{i-1}$.

- Laskenta voidaan toteuttaa OBD-tekniikalla käyttämällä relaatioille karakteristisia funktioita.
- Toteutuksen kannalta on keskeistä, että OBD-tekniikkaa tarjoaa tehokkaan *ekvivalenssitestin*: sarja suppenee, kun χ_{S_i} ja $\chi_{S_{i-1}}$ ekvivalentteja.
- Iteraatioiden määrää voidaan vähentää käyttämällä sarjaa

$$S_{(0)} = I \cup S$$
$$S_{(i+1)} = S_{(i)} \circ S_{(i)}$$

Arviointia

- OBD-tekniikka lyönyt läpi esim. digitaalipiirien ja tilakoneiden verifioinnissa.
- Vaatii paljon muistia.
- Hyvän muuttujajärjestyksen löytyminen keskeinen kysymys.
- BDD sisältää "kaikki ratkaisut."

  Näin ollen BD-tekniikka ei ole parhaimmillaan, kun halutaan löytää yksi ratkaisu monen joukosta (esim. toteutuvuus, kombinatoriset ongelmien ratkaiseminen).