**T-79.154** **Syksy 2003**
**Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä II**
**Laskuharjoitus 8**
**Ratkaisut**

1. a) Koska $\Gamma(\emptyset) = \{a, b, c, d\}$ WF-malli on tyhjä. Lasketaan stabiilit mallit.

| | |
|---|---|
| not $a$ | oletus |
| $b$ | $b \leftarrow$ not $a$ |
| $c$ | $c \leftarrow b$ |
| not $d$ | koska $d \leftarrow$ not $c, a$ ei voida käyttää (not $a$) |

Atomilauseiden totuusarvot ovat nyt määritelty. Tarkastellaan onko $\{b, c\}$ stabiili malli:

$$\Gamma(\{b, c\}) = \{b, c\}$$

implikoi että $\{b, c\}$ on ensimmäinen malli. Peruutetaan nyt oletus not $a$:

| | |
|---|---|
| $a$ | oletus, peruutettu |
| not $b$ | $a$ saadaan ainoastaan jos not $b$ ja not $d$ |
| not $d$ | |
| $c$ | $c \leftarrow$ not $d$ |

Kun

$$\Gamma(\{a, c\}) = \{a, c\}$$

niin $\{a, c\}$ on toinen stabiili malli. Muita malleja ei ole, koska oletuksia ei ole enää jäljellä.

b) Lasketaan WF-malli:

$$\Gamma^1(\emptyset) = \{a, b, c, d\}$$
$$\Gamma^2(\emptyset) = \{a, b\}$$
$$\Gamma^3(\emptyset) = \{a, b, c, d\}$$
$$\Gamma^4(\emptyset) = \{a, b\}$$

Näin ollen WF-malli on $\{a, b, \neg f\}$. Yritetään laajentaa WF-malli stabiiliksi malliksi etsimällä totussarvot atomeille $c$ ja $d$. Koska $b$ on tosi, täytyy joko $c$:n tai $d$:n, mutta ei molempien, olla

tosi. Näin ollen saadaan kaksi mahdollista stabiilia mallia: $\{a, b, c\}$ ja $\{a, b, d\}$. Tarkistamalla niiden reduktiot voidaan todeta, että molemmat mallit ovat stabiileja.

c) Käytetään lyhennysmerkintää $s^n(0) = n$. Lisäksi ratkaisussa esiintyy joukko-opillinen komplementaatio $\overline{S}$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\emptyset) &= \overline{\{p(0,i)\}}_{i=0}^{\infty} \\
\Gamma^2(\emptyset) &= \{q(0,0), r(0), dom(i)\}_{i=0}^{\infty} \\
\Gamma^3(\emptyset) &= \overline{\{p(0,i), p(1,i)\}}_{i=0}^{\infty} \\
\Gamma^4(\emptyset) &= \{q(0,0), q(1,0), r(0), dom(i)\}_{i=0}^{\infty} \\
&\vdots \\
\Gamma^{2n+1}(\emptyset) &= \overline{\{p(0,i), \ldots, p(n,i)\}}_{i=0}^{\infty} \\
\Gamma^{2n+2}(\emptyset) &= \{q(0,0), \ldots, q(n,0), r(0), dom(i)\}_{i=0}^{\infty} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega}(\emptyset) &= \{q(i,0), dom(i), r(0)\}_{i=0}^{\infty} \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega+1}(\emptyset) &= \{q(i,0), dom(i), r(0), r(1), q(0,1)\}_{i=0}^{\infty} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega\cdot 2}(\emptyset) &= \{q(i,0), q(i,1), dom(i), r(0), r(1)\}_{i=0}^{\infty} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega\cdot k}(\emptyset) &= \{q(i,j), dom(i), r(j)\}_{\substack{0\leq i<\infty \\ 0\leq j<k}} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega^2}(\emptyset) &= \{q(i,j), dom(i), r(j)\}_{\substack{0\leq i<\infty \\ 0\leq j<\infty}}
\end{aligned}
$$

Koska saatu WF-malli myös $\Gamma$-operaattorin kiintopiste, on se samalla myös ohjelman yksikäsitteinen stabiili malli.