

Toteutuvuusongelman ratkaiseminen paikallisilla hakumenetelmillä

- Paikalliset hakumenetelmät (esim. simuloitu jäähtytys) suosittuja kombinatoristen (optimointi)ongelmien ratkaisemisessa.
- Idea: (i) Lähdetään liikkeelle satunnaisesti generoidusta ratkaisuehdokkaasta, (ii) pyritään paikallisin muutoksin etenemään kohti parempaa ratkaisuehdokasta, (iii) tehdään paikallisia muutoksia myös satunnaisesti (ei aina suuntaan, joka johtaa paikallisesti parempaan ratkaisuehdokkaaseen).
- Paikalliset hakumenetelmät ovat *epätäydellisiä*: ne eivät taka, että ratkaisu löytyy (vaikka sellainen on olemassa).

© 2002 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Paikallinen haku toteutuvuusongelmassa

- Paikallisen haun perusidea:
 - Aloitetaan satunnaisesti generoidusta totuusjaketusta.
 - Suoritetaan paikallisia muutoksia vaihtamalla atomilauseiden totuusarvoja (flip).
 - Ahne haku: muutetaan totuusarvo sellaiselta atomilauseelta, joka johtaa suurimpaan laskun epätosien lauseiden määrässä.
- Ongelma: miten päästään pois **paikallisista minimeistä** (totuusjaketuista, joissa minkään atomilauseen totuusarvon muuttaminen ei laske epätosien lauseiden määrää)?
 - Uudelleen aloittaminen
 - Sivuttaissiirrot (epätosien lauseiden määrä ei laske)
 - Satunnaiset siirrot (epätosien lauseiden määrä saattaa kasvaa)

© 2002 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Toteutuvuusongelma

- Hakuongelma (SAT): löydettävä annetulle lausejoukolle malli.
- Optimointiongelma (MAX-SAT): löydettävä annetulle lausejoukolle totuusjaketu, jossa mahdollisimman moni joukon lause on tosi.
- Tyypillisesti käsitellään konjunkttiivisessa normaalimuodossa olevia lausejoukkoja (klausuulijoukkoja).

Esimerkki. Olkoon joukko $S = \{A \vee B, \neg A \vee B, A \vee \neg B\}$.

- Joukon S toteutuvuusongelmalle löytyy ratkaisu $\{A, B\}$.
- Joukko $S \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ on toteutumaton, mutta \emptyset , $\{A\}$, $\{B\}$ ja $\{A, B\}$ ovat vastaavan optimointiongelman ratkaisuja.

© 2002 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukon

$$S = \{A \vee B, \neg A \vee B, A \vee \neg B\}.$$

osoittamista toteutuvaksi paikallisella haulalla:

| Satunnainen totuusjaketu: | Aloitetaan uudelleen: |
|------------------------------------|------------------------------------|
| $\{\neg A, \neg B\}$ | $\{\neg A, B\}$ |
| (1) | (1) |
| $\{A, \neg B\} \mid \{\neg A, B\}$ | $\{A, B\} \mid \{\neg A, \neg B\}$ |
| (1) (1) | (0) (1) |
| Paikallinen minimi. | Malli löytyi. |

- Yllä totuusjaketut on esitetty literaalijoukkoina.
- Epätosien klausuulien lukumäärä on kirjattu suluissa.

© 2002 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa

$$S = \{ A \vee \neg B, A \vee \neg C, B \vee \neg A, B \vee \neg C, \\ C \vee \neg A, C \vee \neg B, \neg A \vee \neg B \}.$$

- Totuusarvomuutokset voivat johtaa aina huonompiin malleihin:

$$\begin{array}{c} \{A, B, C\} \\ (1) \\ \{A, \neg B, C\} \mid \{\neg A, B, C\} \mid \{A, B, \neg C\} \\ (2) \quad (2) \quad (3) \end{array}$$

☞ Turvaudutaan tarvittaessa satunnaiseen siirtymään.

- **GSAT+RW** (satunnainen vaellus)
B. Selman, and H.A. Kautz [IJCAI, 1993]:
Domain-Independent Extensions to GSAT: Solving Large Structure Satisfiability Problems.
- **GSAT+RN** (satunnainen kohina)
- **WSAT** (satunnainen vaellus II)
B. Selman, H.A. Kautz, and B. Cohen [DIMACS, 1993]:
Local Search Strategies for Satisfiability Testing.

Paikalliseen hakuun perustuvia algoritmeja

- **GSAT** (ahne paikallinen haku)
B. Selman, H.J. Levesque, and D.G. Mitchell [AAAI, 1992]:
A New Method for Solving Hard Satisfiability Problems.
- **SA** (simuloitu jäähtytys)
D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, and C. Schevon [Operations Research, 1991]:
Optimization by Simulated Annealing: an Experimental Evaluation; part I, Graph Coloring and Number Partitioning

GSAT (ahne paikallinen haku)

Function GSAT(S):

for $i := 1$ to MAX-TRIES **do**

$M :=$ satunnaisesti generoitu totuusjaku;

for $j := 1$ to MAX-FLIPS **do**

if $M \models S$ **then** return M

else Valitaan satunnaisesti jokin atomilause P niistä atomilauseista, joiden totuusarvomuutoksella saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä ja muutetaan P :n totuusarvo.

endif

endfor

endfor

☞ GSAT-algoritmi mahdollistaa sivuttaissiirrot.

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa $S =$

$$\{ A \vee B \vee C, \quad A \vee B \vee \neg C, \quad A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee \neg B \vee \neg C, \\ \neg A \vee B \vee C, \quad \neg A \vee \neg B \vee C, \quad \neg A \vee B \vee \neg C \}.$$

Ahne paikallinen haku voi edetä esim. seuraavasti:

$$\{\neg A, \neg B, \neg C\} \quad (1)$$

| (A)

$$\{A, \neg B, \neg C\} \quad (1)$$

| (B)

$$\{A, B, \neg C\} \quad (1)$$

| (C)

$$\{A, B, C\} \quad (0)$$

SA (simuloitu jäähtytys)

$M :=$ satunnaisesti generoitu totuusjaku;

repeat

if $M \models S$ **then** return M

else Valitse satunnaisesti atomilause A .

Laske muutos epätosien lauseiden määrässä (ΔA),

kun A :n totuusarvo vaihdetaan.

if $\Delta A \leq 0$ (määrä ei kasva) **then**

muuta mallia M vaihtamalla A :n totuusarvo

else vaihda A :n totuusarvo todennäköisyydellä $e^{-\Delta A/T}$.

endif

endif

until Fals^e

GSAT (arviointia)

- Valittava parametrit MAX-TRIES ja MAX-FLIPS.
- Atomilauseiden satunnainen valinta tekee silmukat epätodennäköisiksi.
- Sivuttaissiirrot oleellisia:
ilman niitä suorituskyky selvästi huonompi.
- Ahneet siirrot voivat viedä harhaan.
(Pahimmillaan päädytään toistuvasti samaan paikalliseen minimiin aloitettaessa haku uudelleen.)

☞ Tulisi sallia myös satunnaiset siirrot, joilla epätosien lauseiden määrä saattaa jopa kasvaa.

Esimerkki. Palataan edellisen esimerkin klausuulijoukkoon $S =$

$$\{ A \vee B \vee C, \quad A \vee B \vee \neg C, \quad A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee \neg B \vee \neg C, \\ \neg A \vee B \vee C, \quad \neg A \vee \neg B \vee C, \quad \neg A \vee B \vee \neg C \}.$$

Simuloituun jäähtytykseen perustuva haku voi edetä esim. seuraavasti:

$$\{A, B, \neg C\} \quad (1)$$

| (B) $\Delta B = 0$

$$\{A, \neg B, \neg C\} \quad (1)$$

| (A) $\Delta A = 0$

$$\{\neg A, \neg B, \neg C\} \quad (1)$$

⋮

Satunnaissiirtymät eivät tule kysymykseen tässä esimerkissä!

SA (arviointia)

- Parametri T (lämpötila) määrää todennäköisyyden sille, milloin huonompaan suuntaan johtava muutos tehdään.

| T | ΔA | $e^{-\Delta A/T}$ |
|-----|------------|-------------------|
| 5 | 1 | 0.819 |
| 0.5 | 1 | 0.135 |
| 0.5 | 2 | 0.0183 |
| 0.2 | 1 | 0.00674 |
| 0.2 | 2 | 0.0000454 |

- Valittava tapa lämpötilan T vähentämiseksi (jäähdytysaikataulu).

GSAT+RW (satunnainen vaellus)

```

for  $i := 1$  to MAX-TRIES do
   $M :=$  satunnaisesti generoitu totuusjaku;
  for  $j := 1$  to MAX-FLIPS do
    if  $M \models S$  then return  $M$ 
    else Todennäköisyydellä  $p$ : valitse satunnaisesti atomilause, joka
      esiintyy jossain epätodessa lauseessa ja muuta sen totuusarvo.
      Todennäköisyydellä  $1 - p$ : muuta minkä tahansa atomilauseen
      totuusarvo, jolla saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä.
    endif
  endfor
endfor

```

☞ Satunnaisen vaeltamisen ja ahneen haun yhdistelmä.

- Jäähdytysaikatauluja:
 - Geometrinen aikataulu: $T_{i+1} = c * T_i$, missä $0 < c < 1$.
 - Lämpötila vakio.
- Äärellinen jäähdytysaikataulu ei takaa ratkaisun löytymistä, joten joudutaan käyttämään uudelleen aloittamista.
- Keskeisiä eroja **GSAT**:iin nähden:
 1. **GSAT** tekee aina muutoksen, joka vähentää epätosien lauseiden määrää, jos sellainen on olemassa.
 2. Muuttujan (alustava) valinta on **SA**:ssa satunnainen. Vaikka $\Delta A < 0$, voi löytyä toinen atominen lause B siten, että $\Delta B < \Delta A$. Tällaisessa tilanteessa **GSAT** ei valitsisi A :ta.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee E, \neg A \vee B, \neg B \vee C, \neg C \vee D \vee E\}$.

Kun $p = 1$ (ei ahneita siirtoja), haku voi edetä esim. seuraavasti:

$$\{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, \neg E\} \quad (1)$$

$$| (A)$$

$$\{A, \neg B, \neg C, \neg D, \neg E\} \quad (1)$$

$$| (B)$$

$$\{A, B, \neg C, \neg D, \neg E\} \quad (1)$$

$$| (C)$$

$$\{A, B, C, \neg D, \neg E\} \quad (1)$$

$$| (E)$$

$$\{A, B, C, \neg D, E\} \quad (0)$$

GSAT+RW (arviointia)

- Vaatii parametrinä olevan todennäköisyyden p valinnan.
- Tyypillisesti $0.5 \leq p \leq 0.6$.
- Huomaa satunnaisen vaeltamisen tavoitehakuisuus: mahd. huonompaan suuntaan (epätosien lauseiden määrä kasvaa) tapahtuvat siirtymät liittyvät vielä epätosiin lauseisiin.

Esimerkki. Olkoon

$$S = \{A \vee \neg B, A \vee \neg C, B \vee \neg A, \neg B \vee \neg C\}.$$

Totuusjaketun $\{A, B, C\}$ tapauksessa satunnainen siirtymä on mahdollinen vain atomilauseille B ja C .

WSAT (satunnainen vaellus II)

```

for  $i := 1$  to MAX-TRIES do
   $M :=$  satunnaisesti generoitu totuusjaketu;
  for  $j := 1$  to MAX-FLIPS do
    if  $M \models S$  then return  $M$ 
    else Valitse satunnaisesti jokin epätosi lause.
      Todennäköisyydellä  $p$ : valitse satunnaisesti siitä atomilause ja
      muuta sen totuusarvo.
      Todennäköisyydellä  $1 - p$ : valitse siitä jokin atomilause, jonka
      totuusarvon muutoksella saadaan suurin lasku epätosien lauseiden
      määrässä ja muuta atomilauseen totuusarvo.
    endif
  endfor
endfor

```

GSAT+RN (satunnainen kohina)

```

for  $i := 1$  to MAX-TRIES do
   $M :=$  satunnaisesti generoitu totuusjaketu;
  for  $j := 1$  to MAX-FLIPS do
    if  $M \models S$  then return  $M$ 
    else
      Todennäköisyydellä  $p$ : valitse satunnaisesti jokin atomilause ja
      muuta sen totuusarvo.
      Todennäköisyydellä  $1 - p$ : muuta minkä tahansa atomilauseen
      totuusarvo, jolla saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä.
    endif
  endfor
endfor

```

 Yhdistää puhtaasti satunnaiset muutokset ja ahneen haun.

Esimerkki. Olkoon

$$S = \{A \vee E, E \vee B, \neg B \vee C, \neg A \vee D, \neg E \vee C \vee D\}.$$

Kun $p = 1$ (ei ahneita siirtoja), **WSAT** voi edetä esim. seuraavasti:

$$\begin{array}{ll}
 \{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, \neg E\} & (2) \\
 | (E) & A \vee E \text{ epätosi} \\
 \{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, E\} & (1) \\
 | (C) & \neg E \vee C \vee D \text{ epätosi} \\
 \{\neg A, \neg B, C, \neg D, E\} & (0)
 \end{array}$$

WSAT (arviointia)

- Vaatii parametrinä olevan todennäköisyyden p valinnan.
- **WSAT** yhdistää satunnaisen vaeltamisen ja ahneen haun.
- Huomaa ero verratuna algoritmiin **GSAT+RW**:
Esim. kun $p = 1$ (ei ahneita siirtoja), algoritmit toimivat eri tavoin: **WSAT** suosii satunnaisissa siirroissa atomilauseita, jotka esiintyvät monissa epätositissa lauseissa.

Johtopäätöksiä

- Paikalliset hakumenetelmät suoraviivaisia toteuttaa.
- Toteutuvuusongelmaan suunnitelluilla menetelmillä parempi suorituskyky kuin yleisemmillä.
- Hyvät parametrien arvot oleellisia suorituskyvyn kannalta.
Esim. **WSAT**:issa satunnaisen muutoksen todennäköisyys p tai **SA**:ssa jäähdytysaikataulu (*parametrien viritysongelma*).
- Paikallisilla hakumenetelmillä ongelmia, kun tehtävässä rakennetta (atomilauseiden välillä monimutkaisia riippuvuuksia).
- *Paikalliset hakumenetelmät eivät ole täydellisiä:*
 - (a) ne eivät takaa ratkaisun löytymistä;
 - (b) ne eivät kykyne päättämään, ettei ratkaisua ole olemassa;
 - (c) ne eivät takaa ratkaisun optimaalisuutta.

Kokeellisia vertailuja

- Vertailut perustuvat usein satunnaisesti generoituihin esimerkkiluokkiin.
- Parhaat variantit **GSAT+RW** ja **WSAT** (**WSAT** näyttäisi olevan näistä kahdesta parempi).
- Kumpikin tehokkaampia kuin esim. **SA** (simuloitu jäähdytys).
- **GSAT+RW** parempi kuin **GSAT+RN**.
- Joskus paikalliset hakumenetelmät ratkaisevat paljon suurempia ongelmia kuin täydelliset menetelmät (esim. Davis-Putnam).