

T-79.154

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä II (2 ov)

Syksy 2002

Kurssin sisältö

- Lauselogiikan parhaat toteutusmenetelmät:
Davis-Putnam, BDDt, stokastiset menetelmät.
- Sääntöpohjainen päättely (looginen pohja, toteutusmenetelmät)
- Sovellutuksia
- Tietojenkäsittelyssä usein toistuvat käsitteet:
 - formaali malli
 - ristiriidattomuus ja täydellisyys
 - tehokkuus; laajojen ongelmien monimutkaisuus

Käytännön asioita

Luennot: torstaisin klo 14–16, sali TB353

Luennoitsija: TkT Tomi Janhunen, TB335,
puh. 451 3255, e-mail: Tomi.Janhunen@hut.fi.

Laskuharjoitukset: tiistaisin klo 15–16, sali TB353

Laskuharjoitusassistentti: DI Tommi Syrjänen, TB350,
puh. 451 5082, e-mail: Tommi.Syrjanen@hut.fi.

Kotisivu: <http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.154/>

Uutisryhmä: opinnot.tik.logiikka

Sähköposti: t79154@tcs.hut.fi

Kurssin suorittaminen

Kurssin suorittaminen edellyttää hyväksyttyjä

- **kolmea kotitehtävää**
 - Ongelman mallintaminen
 - Ratkaisun löytäminen opetuilla menetelmillä
 - Arvostelu: hyväksytty / hylätty
- **tenttiä**
 - keskiviikkona 11.12.2002 klo 13–16, sali T1
 - lisäksi vuoden 2003 puolella 2 tenttiä (tarpeen mukaan)

Kurssin arvosana määräytyy tentin arvosanan mukaan.

Lauselogiika tietojenkäsittelyssä

- Formaalit menetelmät yleistyvät
- Logiikkapohjaisten työkalujen käyttö tavallista

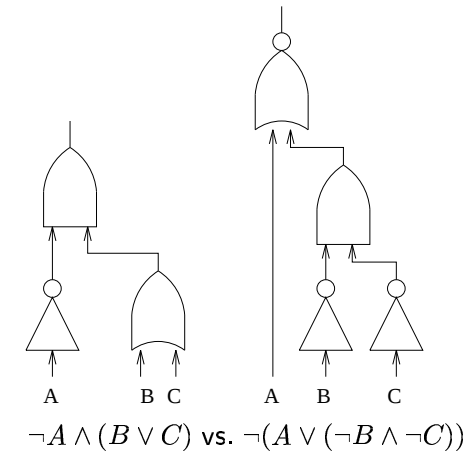
The use of formal verification tools is well established and becoming more so. Simulation- and emulation-based methodologies aren't sufficient to guarantee correctness with today's complex chips.

(Carl Pixley, Motorola Inc. in IEEE Spectrum)

- ☞ Tietokoneiden suorituskyvyn ja muistin määrän nopea kasvu
- ☞ Toteutusmenetelmien kehitys

Esimerkki: digitaalipiirien verifiointi

- Piirin määrittely ja toteutus esitetään logiikan lauseina.
- Toteutuksen oikeellisuus verifioidaan tarkastamalla looginen ekvivalenssi määrittelyn kanssa.



Sovellutusalueita

- Digitaalipiirien synteesi ja verifiointi
- Vikadiagnoosi
- Testien generointi
- Rinakkaisten ja hajautettujen järjestelmien verifiointi
- Suunnittelu
- Reitittäminen ja logistiikka
- Erilaiset kombinatoriset ongelmat

Esimerkki: rajoiteohjelmointi

3-väritysongelma: Voidaanko annetun graafin $G = \langle S, K \rangle$ solmut värittää kolmella värillä siten, ettei naapureilla ole sama väri.

Graafin jokaista solmua $a \in S$ kohti 3 atomilauseetta: A_p, A_s, A_v

Rajoitteiden (lauselogiikan lauseiden) joukko:

1. Jokaista solmua $a \in S$ kohti lause $A_p \vee A_s \vee A_v$.
2. Jokaista kaarta $\langle a, b \rangle \in K$ kohti lauseet

$$\neg A_p \vee \neg B_p,$$

$$\neg A_s \vee \neg B_s \text{ ja}$$

$$\neg A_v \vee \neg B_v.$$

- ☞ Graafilla on 3-väritys jos ja vain jos lausejoukko on toteutuva.

Lauselogiikan kertaus

- Syntaksi: aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt
- Semantiikka: totuusjaketut ja totuusmääritelmä
- Semanttiset peruskäsitteet:
 - Mallin käsite
 - Toteutuvuus
 - Pätevyys
 - Looginen seuraavuus
 - Looginen ekvivalenssi
- Normaalimuodot
- Yhteys predikaattilogiikkaan

Kielen määritelmä

Olkoon $\mathcal{P}$ ei-tyhjä joukko atomisia lauseita.

Lauselogiikan lauseenmuodostussäännöt:

1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on *lause*.
2. Jos α ja β ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat *lauseita*.
3. vain edellä olevien sääntöjen perusteella muodostetut merkkijonot ovat *lauseita*.

Näiden sääntöjen nojalla muodostettavissa olevien lausekkeiden (lauseiden) joukkoa kutsutaan (atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvaksi) lauselogiikan kieleksi $\mathcal{L}$.

Lauselogiikan aakkosto

- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \dots, B, B_1, \dots, C, \dots$
- negaattiosymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaattiosymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: $()$

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

Sopimukset sulkeiden käytöstä

- Uloimmat sulkeet tapana jättää pois: $A \rightarrow B$ eikä $(A \rightarrow B)$
- Konnektiivien presedenssi:
 1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista
 2. $\vee, \wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow, \leftrightarrow$
 3. $\rightarrow, \leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit

Esimerkiksi: $\neg A \rightarrow B$ eikä $(\neg A) \rightarrow B$,

$A \wedge B \rightarrow B \vee C$ eikä $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$,

mutta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$.

- Ketjudisjunktiot/konjunktiot: $A \vee B \vee C$ kirjoitetaan lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

Totuusjaketut

Määritelmä. *Totuusjaketu* $\mathcal{A}$ on atomisten lauseiden joukon $\mathcal{P}$ osajoukko.

Ajatuksena on, että

- $\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat tosia,
- $\mathcal{P} - \mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat epätosia.

Huomio. Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjaketuja on $|\mathcal{P}| = 2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.

Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ totuusjaketu. Seuraavassa määritellään milloin lause $\phi \in \mathcal{L}$ on **tosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \models \phi$) ja milloin ϕ on **epätosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \not\models \phi$).

Mallin käsite ja toteutuvuus

Määritelmä. Totuusjaketu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lauseen $\alpha \in \mathcal{L}$ *malli*, joss lause α on tosi $\mathcal{A}$:ssa eli $\mathcal{A} \models \alpha$.

Esimerkki. Totuusjaketut $\mathcal{A}_1 = \{A\}$, $\mathcal{A}_2 = \{B\}$ ja $\mathcal{A}_3 = \{A, B\}$ ovat malleja lauseelle $A \vee B$.

Määritelmä. Totuusjaketu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *malli* ($\mathcal{A} \models \Sigma$), joss kaikille lausejoukon Σ lauseille $\sigma \in \Sigma$ pätee $\mathcal{A} \models \sigma$.

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) on *toteutuva*, joss ainakin yksi totuusjaketu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on sen malli.

Lauselogiikan totuusmääritelmä

Määritelmä.

1. $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$ (atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$).
2. $\mathcal{A} \models \neg \alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$.
3. $\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$.
4. $\mathcal{A} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
5. $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
6. $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$ tai $\mathcal{A} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A} \not\models \beta$.

Huomio.

$$\mathcal{A} \models P_1 \wedge \dots \wedge P_n \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}: \mathcal{A} \models P_i.$$

$$\mathcal{A} \models P_1 \vee \dots \vee P_n \iff \exists i \in \{1, \dots, n\}: \mathcal{A} \models P_i.$$

Pätevyys ja looginen ekvivalenssi

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *pätevä/tautologia* (merkitään $\models \alpha$), joss $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille totuusjaketuille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P} = \{A\}$ ja $\mathcal{L}$ vastaava kieli. Lause $A \vee \neg A$ on pätevä, koska $A \vee \neg A$ on tosi totuusjaketuissa $\mathcal{A}_1 = \{\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A\}$.

Määritelmä. Lauseet $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentteja* ($\alpha \equiv \beta$), joss $\mathcal{A} \models \alpha \iff \mathcal{A} \models \beta$ kaikille totuusjaketuille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. A ja $\neg \neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit, koska näillä on sama totuusarvo kaikissa totuusjaketuissa.

Huomio. Kaikille $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ pätee $\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Looginen seuraavuus

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ looginen seuraus (merkitään $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille lausejoukon Σ malleille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. $\neg\neg A$ seuraa loogisesti lausejoukoista $\{A\}$ ja $\{A \wedge \neg A\}$.

Huomioita.

- Jos $\Sigma \not\models \alpha$, on olemassa **vastamalli** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models \alpha$ (vastaava käsite käytössä myös pätevyyden tapauksessa).
- $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$.
- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.
- $\Sigma \models \alpha \iff \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Totuusjaku voidaan ymmärtää yhden asiantilan kuvauksena.

Esimerkki. Lamppuesimerkin tapauksessa:

$\mathcal{A}_1 = \{P\}$: Patterissa on riittävästi varausta.

Kytkin ei ole suljettu.

Lamppu ei pala.

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.

Lamppu palaa.

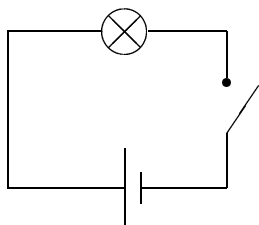
Kytkin on suljettu.

Näistä jälkimmäinen on mitä ilmeisimmin fyysisesti mahdoton, mutta kuitenkin loogisesti mahdollinen asiantila.

Laaditaan täydellinen totuustaulukko lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$ ja lauseelle $\neg L \vee K \in \mathcal{L}$.

Esimerkki

Esimerkki. Kuvataan seuraavaa yksinkertaista järjestelmää lauselogiikan lausein.



Valitaan atomisiksi lauseiksi

L = "Lamppu palaa",

K = "Kytkin on suljettu" ja

P = "Paristossa on riittävästi varausta".

Määritellään järjestelmän sallitut tilat lauseilla

$\neg P \rightarrow \neg L$ ja

$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$.

P	L	K	$\neg P$	$\neg L$	$\neg P \rightarrow \neg L$	$L \leftrightarrow K$	$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$	$\neg L \vee K$
T	T	T	E	E	T	T	T	T
T	T	E	E	E	T	E	E	E
T	E	T	E	T	T	E	E	T
T	E	E	E	T	T	T	T	T
E	T	T	T	E	E	T	T	T
E	T	E	T	E	E	E	T	E
E	E	T	T	T	T	E	T	T
E	E	E	T	T	T	T	T	T

Lausejoukolla Σ on neljä erilaista mallia jotka vastaavat järjestelmän sallittuja tiloja.

Lause $\neg L \vee K$ on tosi näissä kaikissa, joten $\Sigma \models \neg L \vee K$.

Konjunkttiivinen ja disjunkttiivinen normaalimuoto

Määritelmä. Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.

Määritelmä. Lause α on *konjunkttiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \dots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{m_i}$.

Disjunkttiivinen normaalimuoto määritellään samaan tapaan, mutta konjunktion ja disjunktion roolit vaihdetaan keskenään:

Määritelmä. Lause α on *disjunkttiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \dots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_{m_i}$.

- (KNM) Lopuksi siirrä $\wedge$ -konnektiivit $\vee$ -konnektiivien ulkopuolelle:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightsquigarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \quad (6)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \rightsquigarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \quad (7)$$

- Tai (DNM) siirrä $\vee$ -konnektiivit $\wedge$ -konnektiivien ulkopuolelle:

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightsquigarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \quad (8)$$

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \rightsquigarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \quad (9)$$

Huomio. Muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin, joten lopputuloksena saadaan mille tahansa lauseelle $\alpha \in \mathcal{L}$ konjunkttiivinen tai disjunkttiivinen normaalimuoto.

Normaalimuotojen johtaminen

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunkttiiviseen (disjunkttiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \rightsquigarrow (\neg \alpha \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee \alpha) \quad (1)$$

- Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \rightarrow \beta \rightsquigarrow \neg \alpha \vee \beta \quad (2)$$

- Siirrä negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

$$\neg \neg \alpha \rightsquigarrow \alpha \quad (3)$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \rightsquigarrow \neg \alpha \wedge \neg \beta \quad (4)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightsquigarrow \neg \alpha \vee \neg \beta \quad (5)$$

Esimerkki. Muutetaan lause $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ konjunkttiiviseen ja disjunkttiiviseen normaalimuotoon.

$$A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

$$\rightsquigarrow A \vee B \rightarrow (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \quad (1)$$

$$\rightsquigarrow \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (2)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (4)$$

Konjunkttiivinen normaalimuoto:

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \quad (7)$$

$$\rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \quad (6)$$

$$\rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) \quad (6)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B)$$

Disjunkttiivinen normaalimuoto:

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \vee C) \wedge \neg C \vee (\neg B \vee C) \wedge B \quad (8)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B) \quad (9)$$

Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet A ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \dots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \dots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \dots, l_n\}$.
- Joukko klausuuleita S edustaa klausuuliensa konjunktiota.

Huomaa ero: $\neg A \vee B \vee \neg A \rightsquigarrow \{\neg A, B\}$.

Huomio. Konjunkttiivinen normaalimuoto vastaa klausuulijoukkoa.

Esimerkki. Konjunkttiivista normaalimuotoa

$(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

Prenex-normaaliomuoto

Predikaattilogiikan lause α , joka on muotoa $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_n\phi$, missä kukin Q_i on kvanttori ($\forall$ tai $\exists$), ja alikaava ϕ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaali muodossa.

Esimerkki. Seuraavat lauseet ovat prenex-normaali muodossa:

$$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x, y, z) \rightarrow (Q(y, z, w) \rightarrow R(z, w, x))) \quad \forall x \exists y P(x, y)$$

Jokainen predikaattilogiikan lause voidaan muuttaa loogisesti ekvivalenttiin prenex-normaali muotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$:

$$\phi \rightarrow \psi \rightsquigarrow \neg \phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \rightsquigarrow (\neg \phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg \psi)$$

Lauselogiikan ja predikaattilogiikan suhde

- Predikaattilogiikka on lauselogiikan yleistys, jonka syntaksi ja semantiikka ovat monimutkaisemmat.
- Lauselogiikka saadaan predikaattilogiikan erikoistapauksena: atomiset lauseet vastaavat 0-paikkaisia predikaatteja.
- Toisaalta predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi. Olkoon Σ predikaattilogiikan lausejoukko.
 1. Muunnetaan Σ klausuulijoukoksi S siten, että Σ on toteutumaton $\iff S$ on toteutumaton:

$$\Sigma \rightsquigarrow \text{prenex-muoto} \rightsquigarrow \text{skolemointi} \rightsquigarrow \text{KNM} \rightsquigarrow S$$
 2. S on toteutumaton $\iff S$:n Herbrand-instanssien joukon S' äärellinen osajoukko $S'' \subseteq S'$ on toteutumaton.

2. Viedään lauserakenteen negaatiot sisään ja tuodaan kvanttorit ulos (z on uusi muuttuja):

$$\neg \neg \varphi \rightsquigarrow \varphi$$

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow \neg \varphi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\varphi \vee \psi) \rightsquigarrow \neg \varphi \wedge \neg \psi$$

$$\vec{Q}x \neg \forall y \varphi \rightsquigarrow \vec{Q}x \exists y \neg \varphi$$

$$\vec{Q}x \neg \exists y \varphi \rightsquigarrow \vec{Q}x \forall y \neg \varphi$$

$$\vec{Q}x (\forall y \varphi \vee \psi) \rightsquigarrow \vec{Q}x \forall z (\varphi(y/z) \vee \psi)$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

Skolemointi

Olkoon $\vec{Q}x\phi$ prenex-normaali muodossa s.e. $\vec{Q}x$ sisältää kvanttoria $\exists x_i$.

Skolemointi suoritetaan seuraavasti:

- Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan x_i uudella vakiolla c .
- Jos $\exists x_i$:tä edeltävät universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \dots, \forall x_{n_m}$, poistetaan kvanttori $\exists x_i$, ja korvataan x_i :n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_m})$, missä f on uusi funktiosymboli.

Huomio. Skolemointi ei säilytä loogista ekvivalenssia mutta säilyttää toteutuvuuden.

Herbrand-mallit

- Klausuulijoukon S Herbrand-universumi U_S on niiden muuttujattomien termien joukko, joka voidaan muodostaa S :ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos S :ssä ei esiinny vakio- ja funktiosymboleja, Herbrand-universumi $U_S = \{c\}$.
- Klausuulijoukon S Herbrand-kanta B_S koostuu atomisista lauseista, jotka voidaan konstruoida käyttäen S :ssä esiintyviä predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin termejä.
- Klausuulijoukon S Herbrand-mallit ovat Herbrand-kannan B_S osajoukkoja ja ne voidaan tulkita lauselogiikan totuusjakeluiksi.
- Klausuulijoukon S Herbrand-instanssien joukko S' saadaan korvaamalla S :n klausuulien muuttujat klausuuli klausuulilta kaikilla mahdollisilla U_S :n termien kombinaatioilla.

Klausuulimuoto predikaattilogiikassa

Mikä tahansa predikaattilogiikan lause voidaan saattaa klausuulimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Haetaan prenex-normaali muoto.
2. Muunnetaan tämä konjunkttiivinen normaalimuotoon.
3. Mikäli KNM sisältää eksistenssikvanttoreita, skolemoidaan.
4. Kirjoitetaan klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja).

Esimerkki. Haetaan klausuuliesitys lauseelle

$$\forall x(\neg(P(x) \rightarrow \forall yQ(x, y)) \vee R(x)):$$

$$\rightsquigarrow \forall x\exists z((P(x) \wedge \neg Q(x, z)) \vee R(x)) \quad (1)$$

$$\rightsquigarrow \forall x\exists z((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x, z) \vee R(x))) \quad (2)$$

$$\rightsquigarrow \forall x((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x, f(x)) \vee R(x))) \quad (3)$$

$$\rightsquigarrow \{\{P(x), R(x)\}, \{\neg Q(x, f(x)), R(x)\}\} \quad (4)$$

Esimerkki. Olkoon klausuulijoukko

$$S = \{\{\neg P(x), Q(f(x, x))\}, \{P(c)\}\}.$$

Klausuulijoukossa esiintyvät vakio c ja funktiosymboli $f(\cdot, \cdot)$.

- Herbrand-universumi
 $U_S = \{c, f(c, c), f(f(c, c), c), f(c, f(c, c)), f(f(c, c), f(c, c)), \dots\}.$
- Herbrand-kanta $B_S = \{P(c), Q(c), P(f(c, c)), Q(f(c, c)), \dots\}.$
- Herbrand-instanssien joukko $S' =$
 $\{\{P(c)\}, \{\neg P(c), Q(f(c, c))\},$
 $\{\neg P(f(c, c)), Q(f(f(c, c), f(c, c)))\}, \dots\}.$
- Esim. $\mathcal{A} = \{P(c), P(f(c, c))\}$ on S' :n ja S :n Herbrand-malli.

Tietämyksen esittäminen

Tietämyksen esittämisen kannalta on usein järkevää nimetä universumin alkiot yksikäsitteisesti:

- Jokaisen vakiosymbolin viitattava eri alkioon (unique names):

$$\neg(a = b), \neg(b = c), \neg(c = a)$$

- Ei muita objekteja kuin nimetyt (domain closure):

$$\forall x(x = a \vee x = b \vee x = c)$$



Voidaan rajautua Herbrand-mallien tarkasteluun



Jos klausuulimuodossa ei esiinny funktiosymboleja, Herbrand-instansseja muodostuu äärellinen määrä ja keskeiset päättelyongelmat säilyvät tällöin ratkeavina.

Johtopäätös

Lauselogiikka on monien sovellusten kannalta riittävä:

- Tarvittaessa rakententeeltaan samankaltaisia lauseita voidaan pakata yhdeksi lauseeksi muuttujien avulla: esim. $P(x) \rightarrow Q(x)$.
- Ongelmaksi jää tällöin instantioinnin järjestäminen järkevästi (tehdääkö instantiointi kerralla vai tarpeen mukaan).
- Yksi mahdollisuus on rajoittaa/kontrolloida instantiointia erityisten domain-predikaattien $D(x)$ avulla: $(D(x) \wedge P(x) \rightarrow Q(x))$.