Toteutuvuusongelman ratkaiseminen paikallisilla hakumenetelmillä

- Paikalliset hakumenetelmät (esim. simuloitu jäähdytys) suosittuja kombinatoristen (optimointi)ongelmien ratkaisemisessa.
- Idea: (i) Lähdetään liikkeelle satunnaisesti generoidusta ratkaisuehdokkaasta, (ii) pyritään paikallisin muutoksin etenemään kohti parempaa ratkaisuehdokasta, (iii) tehdään paikallisia muutoksia myös satunnaisesti (ei aina suuntaan, joka johtaa paikallisesti parempaan ratkaisuehdokkaaseen).
- Paikalliset hakumenetelmät ovat *epätäydellisiä*: ne eivät takaa, että ratkaisu löytyy (vaikka sellainen on olemassa).

Toteutuvuusongelma

- Hakuongelma (**SAT**): löydettävä annetulle lausejoukolle malli.
- Optimointiongelma (**MAX-SAT**): löydettävä annetulle lausejoukolle malli, jossa mahdollisimman moni joukon lause on tosi.
- Tyypillisesti käsitellään konjunktiivisessa normaalimuodossa olevia lausejoukkoja (klausuulijoukkoja).

Esimerkki. Olkoon joukko $S = \{A \vee B, \neg A \vee B, A \vee \neg B\}$.

- Joukon S toteutuvuusongelmalle löytyy ratkaisu $\{A, B\}$.
- Joukko $S \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ on toteutumaton, mutta $\emptyset$, $\{A\}$, $\{B\}$ ja $\{A, B\}$ ovat vastaavan optimointiongelman ratkaisuja.

Paikallinen haku toteutuvuusongelmassa

- Paikallisen haun perusidea:
  (i) Aloitetaan satunnaisesti generoidusta mallista.
  (ii) Suoritetaan paikallisia muutoksia vaihtamalla atomilauseiden totuusarvoja (flip).
  (iii) Ahne haku: muutetaan totuusarvo sellaiselta atomilauseelta, joka johtaa suurimpaan laskuun epätosien lauseiden määrässä.
- Ongelma (tyypillinen paikallisille hakumenetelmille):
  miten päästään pois paikallisista minimeistä (malleista, joissa mikään totuusarvon muutos ei laske epätosien lauseiden määrää)?
  (a) Uudelleen aloittaminen
  (b) Sivuttaissiirrot (epätosien lauseiden määrä ei laske)
  (c) Satunnaiset siirrot (epätosien lauseiden määrä saattaa kasvaa)

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa

$$S = \{A \lor B, \neg A \lor B, A \lor \neg B\}.$$

$$\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\{\neg A, \neg B\}} \\
\multicolumn{2}{c}{(1)} \\
\{A, \neg B\} & \{\neg A, B\} \\
(1) & (1)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\{\neg A, B\}} \\
\multicolumn{2}{c}{(1)} \\
\{A, B\} & \{\neg A, \neg B\} \\
(0) & (1)
\end{array}$$

Paikallinen minimi

Aloitetaan uudelleen:
malli löytyy

Yllä
– mallit on esitetty literaalijoukkoina ja
– epätosien klausuulien lukumäärä on annettu suluissa.

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa

$$S = \{ \quad A \vee \neg B,\ A \vee \neg C,\ B \vee \neg A,\ B \vee \neg C,\ C \vee \neg A,\ C \vee \neg B,\ \neg A \vee \neg B \quad \}.$$

➤ Totuusarvomuutokset voivat johtaa aina huonompiin malleihin:

$$\begin{array}{c}
\{A, B, C\} \\
(1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
\{A, \neg B, C\} & \{\neg A, B, C\} & \{A, B, \neg C\} \\
(2) & (2) & (3)
\end{array}$$

☞ Turvaudutaan tarvittaessa satunnaiseen siirtymään.

Paikalliseen hakuun perustuvia algoritmeja

➤ **GSAT** (ahne paikallinen haku)
B. Selman, H.J. Levesque, and D.G. Mitchell [1992]: *A New Method for Solving Hard Satisfiability Problems.*

➤ **SA** (simuloitu jäähdytys)
D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, and C. Schevon [1991]: *Optimization by Simulated Annealing: an Experimental Evaluation; part II, Graph Coloring and Number Partitioning*

- **GSAT+RW** (satunnainen vaellus)
  B. Selman, and H.A. Kautz [1993]: *Domain-Independent Extensions to GSAT: Solving Large Structured Satisfiability Problems.*
- **GSAT+RN** (satunnainen kohina)
- **WSAT** (satunnainen vaellus II)
  B. Selman, H.A. Kautz, and B. Cohen [1993]: *Local Search Strategies for Satisfiability Testing.*

GSAT (ahne paikallinen haku)

Function GSAT(S):
for $i := 1$ to MAX-TRIES **do**
  M := satunnaisesti generoitu malli;
  for $j := 1$ to MAX-FLIPS **do**
    if $M \models S$ **then** return M
    else Valitaan satunnaisesti jonkin atomilause P niistä, joiden totuusarvomuutoksella saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä ja muutetaan P:n totuusarvo.
    endif
  endfor
endfor

☞ GSAT-algoritmi mahdollistaa sivuttaissiirrot.

Esimerkki. Tarkastellaan klausuulijoukkoa $S =$

$$\{\ A \vee B \vee C,\quad A \vee B \vee \neg C,\quad A \vee \neg B \vee C,\quad A \vee \neg B \vee \neg C,\quad \neg A \vee B \vee C,\quad \neg A \vee \neg B \vee C,\quad \neg A \vee B \vee \neg C\ \}.$$

Ahne paikallinen haku voi edetä esim. seuraavasti:

$$\begin{array}{cc}
\{\neg A, \neg B, \neg C\} & (1) \\
\mid (A) & \\
\{A, \neg B, \neg C\} & (1) \\
\mid (B) & \\
\{A, B, \neg C\} & (1) \\
\mid (C) & \\
\{A, B, C\} & (0)
\end{array}$$

GSAT (arviointia)

- Valittava parametrit MAX-TRIES ja MAX-FLIPS.
- Atomilauseiden satunnainen valinta tekee silmukat epätodennäköisiksi.
- Sivuttaissiirrot oleellisia:
  ilman niitä suorituskyky selvästi huonompi.
- Ahneet siirrot voivat viedä harhaan.
  (Pahimmillaan päädytään toistuvasti samaan paikalliseen minimiin aloitettaessa haku uudelleen.)

☞ Tulisi sallia myös satunnaiset siirrot, joilla epätosien lauseiden määrä saattaa jopa kasvaa.

SA (simuloitu jäähdytys)

M := satunnaisesti generoitu malli;
repeat
  if $M \models S$ **then** return M
  else Valitse satunnaisesti atomilause A.
    Laske muutos epätosien lauseiden määrässä (ΔA),
    kun A:n totuusarvo vaihdetaan.
    if $\Delta A \leq 0$ (määrä ei kasva) **then**
      muuta mallia M vaihtamalla A:n totuusarvo
    else vaihda A:n totuusarvo todennäköisyydellä $\mathrm{e}^{-\Delta A/T}$.
    endif
  endif
until False

Esimerkki. Palataan edellisen esimerkin klausuulijoukkoon $S =$

$$\{ \quad A \vee B \vee C, \quad A \vee B \vee \neg C, \quad A \vee \neg B \vee C, \quad A \vee \neg B \vee \neg C, \quad \neg A \vee B \vee C, \quad \neg A \vee \neg B \vee C, \quad \neg A \vee B \vee \neg C \quad \}.$$

Simuloituun jäähdytykseen perustuva haku voi edetä esim. seuraavasti:

$$\begin{array}{cl}
\{A, B, \neg C\} & (1) \\
\mid (B) & \Delta B = 0 \\
\{A, \neg B, \neg C\} & (1) \\
\mid (A) & \Delta A = 0 \\
\{\neg A, \neg B, \neg C\} & (1) \\
\vdots &
\end{array}$$

Satunnaissiirtymät eivät tule kysymykseen tässä esimerkissä.

SA (arviointia)

➤ Parametri T (lämpötila) määrää todennäköisyyden sille, milloin huonompaan suuntaan johtava muutos tehdään.

T	ΔA	$e^{-\Delta A/T}$
5	1	0.819
0.5	1	0.135
0.5	2	0.0183
0.2	1	0.00674
0.2	2	0.0000454

➤ Valittava tapa lämpötilan T vähentämiseksi (jäähdytysaikataulu).

➤ Jäähdytysaikatauluja:

— Geometrinen aikataulu: $T_{i+1} = c * T_i$, missä $0 < c < 1$.

— Lämpötila vakio.

➤ Äärellinen jäähdytysaikataulu ei takaa ratkaisun löytymistä, joten joudutaan käyttämään uudelleen aloittamista.

➤ Keskeisiä eroja **GSAT**:iin nähden:

1. **GSAT** tekee *aina* muutoksen, joka vähentää epätosien lauseiden määrää, jos sellainen on olemassa.
2. Muuttujan (alustava) valinta on **SA**:ssa satunnainen.
   Vaikka $\Delta A < 0$, voi löytyä toinen atominen lause B siten, että $\Delta B < \Delta A$. Tällaisessa tilanteessa **GSAT** ei valitsisi A:ta.

GSAT+RW (satunnainen vaellus)

for $i := 1$ to MAX-TRIES **do**
  M := satunnaisesti generoitu malli;
  for $j := 1$ to MAX-FLIPS **do**
    if $M \models S$ **then** return M
    else Todennäköisyydellä p: valitse satunnaisesti atomilause, joka esiintyy jossain epätodessa lauseessa ja muuta sen totuusarvo.
      Todennäköisyydellä $1 - p$: muuta minkä tahansa atomilauseen totuusarvo, jolla saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä.
    endif
  endfor
endfor

☞ Satunnaisen vaeltamisen ja ahneen haun yhdistelmä.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee E,\ \neg A \vee B,\ \neg B \vee C,\ \neg C \vee D \vee E\}$.

Kun $p = 1$ (ei ahneita siirtoja), haku etenee esim. seuraavasti:

$$
\begin{array}{cc}
\{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, \neg E\} & (1) \\
\mid (A) & \\
\{A, \neg B, \neg C, \neg D, \neg E\} & (1) \\
\mid (B) & \\
\{A, B, \neg C, \neg D, \neg E\} & (1) \\
\mid (C) & \\
\{A, B, C, \neg D, \neg E\} & (1) \\
\mid (E) & \\
\{A, B, C, \neg D, E\} & (0)
\end{array}
$$

GSAT+RW (arviointia)

- Vaatii parametrinä olevan todennäköisyyden p valinnan.
- Tyypillisesti $0.5 \leq p \leq 0.6$.
- Huomaa satunnaisen vaeltamisen tavoitehakuisuus: mahd. huonompaan suuntaan (epätosien lauseiden määrä kasvaa) tapahtuvat siirtymät liittyvät vielä epätosiin lauseisiin.

Esimerkki. Olkoon

$$S = \{A \vee \neg B, A \vee \neg C, B \vee \neg A, \neg B \vee \neg C\}.$$

Jos tarkasteltavana mallina on $\{A, B, C\}$, satunnainen siirtymä on mahdollinen vain atomilauseille B ja C.

GSAT+RN (satunnainen kohina)

for $i := 1$ to MAX-TRIES **do**
  M := satunnaisesti generoitu malli;
  for $j := 1$ to MAX-FLIPS **do**
    if $M \models S$ **then** return M
    else
      Todennäköisyydellä p: valitse satunnaisesti jokin atomilause ja muuta sen totuusarvo.
      Todennäköisyydellä $1 - p$: muuta minkä tahansa atomilauseen totuusarvo, jolla saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä.
    endif
  endfor
endfor

☞ Yhdistää puhtaasti satunnaiset muutokset ja ahneen haun.

WSAT (satunnainen vaellus II)

for $i := 1$ to MAX-TRIES **do**
  M := satunnaisesti generoitu malli;
  for $j := 1$ to MAX-FLIPS **do**
    if $M \models S$ **then** return M
    else Valitse satunnaisesti jokin epätosi lause.
      Todennäköisyydellä p: valitse satunnaisesti siitä atomilause ja muuta sen totuusarvo.
      Todennäköisyydellä $1 - p$: valitse siitä jokin atomilause, jonka totuusarvon muutoksella saadaan suurin lasku epätosien lauseiden määrässä ja muuta atomilauseen totuusarvo.
    endif
  endfor
endfor

Esimerkki. Olkoon

$$S = \{A \vee E,\ E \vee B,\ \neg B \vee C,\ \neg A \vee D,\ \neg E \vee C \vee D\}.$$

Kun $p = 1$ (ei ahneita siirtoja), **WSAT** voi edetä esim. seuraavasti:

$$\begin{array}{cl}
\{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, \neg E\} & (2) \\
\mid (E) & A \vee E \text{ epätosi} \\
\{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, E\} & (1) \\
\mid (C) & \neg E \vee C \vee D \text{ epätosi} \\
\{\neg A, \neg B, C, \neg D, E\} & (0)
\end{array}$$

WSAT (arviointia)

- Vaatii parametrinä olevan todennäköisyyden p valinnan.
- **WSAT** yhdistää satunnaisen vaeltamisen ja ahneen haun.
- Huomaa ero verratuna algoritmiin **GSAT+RW**:

  Esim. kun $p = 1$ (ei ahneita siirtoja), algoritmit toimivat eri tavoin: **WSAT** suosii satunnaisissa siirroissa atomilauseita, jotka esiintyvät monissa epätosissa lauseissa.

Kokeellisia vertailuja

- Vertailut perustuvat usein satunnaisesti generoituihin esimerkkiluokkiin.
- Parhaat variantit **GSAT+RW** ja **WSAT** (**WSAT** näyttäisi olevan näistä kahdesta parempi).
- Kumpikin tehokkaampia kuin esim. **SA** (simuloitu jäähdytys).
- **GSAT+RW** parempi kuin **GSAT+RN**.
- Joskus paikalliset hakumenetelmät ratkaisevat paljon suurempia ongelmia kuin täydelliset menetelmät (esim. Davis-Putnam).

Arviointia

- Paikalliset hakumenetelmät suoraviivaisia toteuttaa.
- Toteutuvuusongelmaan suunnitelluilla menetelmillä parempi suorituskyky kuin yleisemmillä.
- Hyvät parametrien arvot oleellisia suorituskyvyn kannalta. Esim. **WSAT**:issa satunnaisen muutoksen todennäköisyys p tai SA:ssa jäähdytysaikataulu (*parametrien viritysongelma*).
- Paikallisilla hakumenetelmillä ongelmia, kun tehtävässä rakennetta (atomilauseiden välillä monimutkaisia riippuvuuksia).
- Paikalliset hakumenetelmät eivät ole täydellisiä:
  (a) ne eivät takaa ratkaisun löytymistä;
  (b) ne eivät kykyne päättämään, ettei ratkaisua ole olemassa;
  (c) ne eivät takaa ratkaisun optimaalisuutta.