T-79.154

Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä II (2 ov)

Syksy 2001

Käytännön asioita

Luennot: torstaisin klo 14–16, sali TB353
Luennoitsija: TkT Tomi Janhunen, TB335,
puh. 451 3255, e-mail: Tomi.Janhunen@hut.fi.

Laskuharjoitukset: tiistaisin klo 15–16, sali TB353
Laskuharjoitusassistentti: DI Tommi Syrjänen, TB350,
puh. 451 5082, e-mail: Tommi.Syrjanen@hut.fi.

Kotisivu: `http://www.tcs.hut.fi/Teaching/Tik-79.154/`

Uutisryhmä: `opinnot.tik.logiikka`

Sähköposti: `t79154@tcs.hut.fi`

Kurssin sisältö

- Lauselogiikan parhaat toteutusmenetelmät:
  Davis-Putnam, BDDt, stokastiset menetelmät.
- Sääntöpohjainen päättely (looginen pohja, toteutusmenetelmät)
- Sovellutuksia
- Tietojenkäsittelyssä usein toistuvat käsitteet:
  - formaali malli
  - ristiriidattomuus ja täydellisyys
  - tehokkuus; laajojen ongelmien monimutkaisuus

Kurssin suorittaminen

Kurssin suorittaminen edellyttää hyväksyttyjä

- **kolmea kotitehtävää**
  - Ongelman mallintaminen
  - Ratkaisun löytäminen opetetuilla menetelmillä
  - Arvostelu: hyväksytty / hylätty
- **tenttiä**
  - keskiviikkona 19.12.2001 klo 13–16, sali T1
  - tiistaina 8.1.2002 klo 13–16, salit DE

Kurssin arvosana määräytyy tentin arvosanan mukaan.

Lauselogiikka tietojenkäsittelyssä

- Formaalit menetelmät yleistyvät
- Logiikkapohjaisten työkalujen käyttö tavallista

  The use of formal verification tools is well established and becoming more so. Simulation- and emulation-based methodologies aren't sufficient to guarantee correctness with today's complex chips.

  (Carl Pixley, Motorola Inc. in IEEE Spectrum)

☞ Tietokoneiden suorituskyvyn ja muistin määrän nopea kasvu

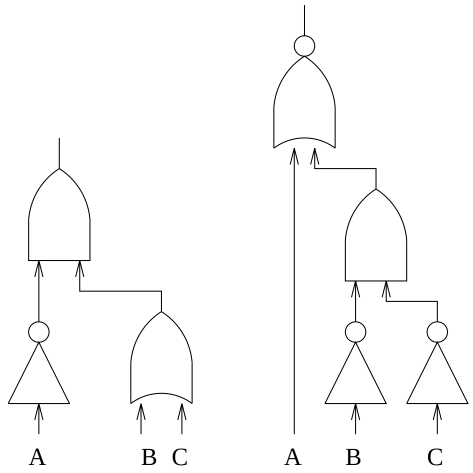
☞ Toteutusmenetelmien kehitys

Sovellutusalueita

- Digitaalipiirien verifiointi
- Digitaalipiirien synteesi
- Vikadiagnoosi
- Testien generointi
- Rinnakkaisten ja hajautettujen järjestelmien verifiointi
- Suunnittelu
- Logistiikka

Esimerkki: digitaalipiirien verifiointi

- Piirin määrittely ja toteutus esitetään logiikan lauseina.
- Toteutuksen oikeellisuus verifioidaan tarkastamalla looginen ekvivalenssi määrittelyn kanssa.



$\neg A \wedge (B \vee C)$ vs $\neg(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$

Esimerkki: rajoiteohjelmointi

3-väritysongelma: Voidaanko annetun graafin solmut värittää kolmella värillä siten, ettei naapureilla ole sama väri.

Graafin jokaista solmua n kohti 3 atomilausetta: n_p, n_s, n_v

Rajoitteet:
(i) kullekin solmulle n,
$n_p \vee n_s \vee n_v$

(ii) jos solmujen n ja m välillä on kaari:
$\neg n_p \vee \neg m_p$
$\neg n_s \vee \neg m_s$
$\neg n_v \vee \neg m_v$

☞ Graafilla on 3-väritys jos ja vain jos lausejoukko on toteutuva.

Lauselogiikan kertaus

- Syntaksi: aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt
- Semantiikka: totuusjakelut ja totuusmääritelmä
- Semanttiset peruskäsitteet:
  - Mallin käsite
  - Toteutuvuus
  - Pätevyys
  - Looginen seuraavuus
  - Looginen ekvivalenssi
- Normaalimuodot
- Yhteys predikaattilogiikkaan

Lauselogiikan aakkosto

- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, \ldots, C, \ldots$
- negaatiosymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaatiosymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: ()

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

Kielen määritelmä

Olkoon $\mathcal{P}$ ei-tyhjä joukko atomisia lauseita.

Lauselogiikan lauseenmuodostussäännöt:

1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on *lause*.
2. Jos α ja β ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat *lauseita*.
3. vain edellä olevien sääntöjen perusteella muodostetut merkkijonot ovat *lauseita*.

Näiden sääntöjen nojalla muodostettavissa olevien lauseiden joukkoa kutsutaan (atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvaksi) lauselogiikan kieleksi $\mathcal{L}$.

Sopimukset sulkeiden käytöstä

- Uloimmat sulkeet tapana jättää pois: $A \rightarrow B$ eikä $(A \rightarrow B)$
- Konnektiivien presedenssi:
  1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista
  2. $\vee$, $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit

     Esimerkiksi: $\neg A \rightarrow B$ eikä $(\neg A) \rightarrow B$,
     $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ eikä $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$,
     mutta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$.
- Ketjudisjunktiot/konjunktiot: $A \vee B \vee C$ kirjoitetaan lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

Totuusjakelut

Määritelmä. *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on atomisten lauseiden joukon $\mathcal{P}$ osajoukko.

Ajatuksena on, että

- $\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat tosia,
- $\mathcal{P} - \mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat epätosia.

Huomio. Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjakeluja on $|\mathbf{2}^{\mathcal{P}}| = 2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.

Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ totuusjakelu. Seuraavassa määritellään milloin lause $\phi \in \mathcal{L}$ on **tosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \models \phi$) ja milloin ϕ on **epätosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \not\models \phi$).

Lauselogiikan totuusmääritelmä

Määritelmä.

1. $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$ (atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$).
2. $\mathcal{A} \models \neg\alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$.
3. $\mathcal{A} \models \alpha \land \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$.
4. $\mathcal{A} \models \alpha \lor \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
5. $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
6. $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$ tai $\mathcal{A} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A} \not\models \beta$.

Huomio.

$\mathcal{A} \models P_1 \land \cdots \land P_n \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\}$: $\mathcal{A} \models P_i$.

$\mathcal{A} \models P_1 \lor \cdots \lor P_n \iff \exists i \in \{1, \ldots, n\}$: $\mathcal{A} \models P_i$.

Mallin käsite ja toteutuvuus

Määritelmä. Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lauseen $\alpha \in \mathcal{L}$ *malli*, joss lause α on tosi $\mathcal{A}$:ssa eli $\mathcal{A} \models \alpha$.

Esimerkki. Totuusjakelut $\mathcal{A}_1 = \{A\}, \mathcal{A}_2 = \{B\}$ ja $\mathcal{A}_3 = \{A, B\}$ ovat malleja lauseelle $A \vee B$.

Määritelmä. Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *malli* ($\mathcal{A} \models \Sigma$), joss kaikille lausejoukon Σ lauseille $\sigma \in \Sigma$ pätee $\mathcal{A} \models \sigma$.

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) on *toteutuva*, joss ainakin yksi totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on sen malli.

Pätevyys ja looginen ekvivalenssi

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *pätevä/tautologia* (merkitään $\models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. Olkoon $\mathcal{P} = \{A\}$ ja $\mathcal{L}$ vastaava kieli. Lause $A \vee \neg A$ on pätevä, koska $A \vee \neg A$ on tosi totuusjakeluissa $\mathcal{A}_1 = \{\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A\}$.

Määritelmä. Lauseet $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentteja* ($\alpha \equiv \beta$), joss $\mathcal{A} \models \alpha \iff \mathcal{A} \models \beta$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

Esimerkki. A ja $\neg\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit, koska näillä on sama totuusarvo kaikissa totuusjakeluissa.

Huomio. Kaikillle $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ pätee $\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Looginen seuraavuus

Määritelmä. Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ looginen seuraus (merkitään $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille lausejoukon Σ malleille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

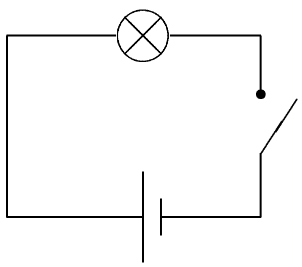
Esimerkki. $\neg\neg A$ seuraa loogisesti lausejoukoista $\{A\}$ ja $\{A \wedge \neg A\}$.

Huomioita.

- Jos $\Sigma \not\models \alpha$, on olemassa **vastamalli** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models \alpha$ (vastaava käsite käytössä myös pätevyyden tapauksessa).
- $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$.
- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.
- $\Sigma \models \alpha \iff \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Esimerkki

Esimerkki. Kuvataan seuraavaa yksinkertaista järjestelmää lauselogiikan lausein.



Valitaan atomisiksi lauseiksi

$L =$ "Lamppu palaa",
$K =$ "Kytkin on suljettu" ja
$P =$ "Paristossa on riittävästi varausta".

Määritellään järjestelmän sallitut tilat lauseilla

$$((\neg P) \rightarrow (\neg L)) \text{ ja}$$
$$(P \rightarrow (L \leftrightarrow K)).$$

© 2001 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

Totuusjakelu voidaan ymmärtää yhden asiantilan kuvauksena.

Esimerkki. Lamppuesimerkin tapauksessa:

$\mathcal{A}_1 = \{P\}$: Patterissa on riittävästi varausta.
Kytkin ei ole suljettu.
Lamppu ei pala.

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.
Lamppu palaa.
Kytkin on suljettu.

Näistä jälkimmäinen on mitä ilmeisimmin fyysisesti mahdoton, mutta kuitenkin loogisesti mahdollinen asiantila.

Laaditaan täydellinen totuustaulukko lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$ ja lauseelle $\neg L \vee K \in \mathcal{L}$.

P	L	K	$\neg P$	$\neg L$	$\neg P \rightarrow \neg L$	$L \leftrightarrow K$	$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$	$\neg L \vee K$
T	T	T	E	E	T	T	T	$\boxed{T}$
T	T	E	E	E	T	E	E	E
T	E	T	E	T	T	E	E	T
T	E	E	E	T	T	T	T	$\boxed{T}$
E	T	T	T	E	E	T	T	T
E	T	E	T	E	E	E	T	E
E	E	T	T	T	T	E	T	$\boxed{T}$
E	E	E	T	T	T	T	T	$\boxed{T}$

Lausejoukolla Σ on neljä erilaista mallia (merkitty nuolin), jotka vastaavat järjestelmän sallittuja tiloja.
Lause $\neg L \vee K$ on tosi näissä kaikissa, joten $\Sigma \models \neg L \vee K$.

Konjunktiivinen ja disjunktiivinen normaalimuoto

Määritelmä. Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.

Määritelmä. Lause α on *konjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$.

Disjunktiivinen normaalimuoto määritellään samaan tapaan, mutta konjunktion ja disjunktion roolit vaihdetaan keskenään:

Määritelmä. Lause α on *disjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos α on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, missä jokainen β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$.

Normaalimuotojen johtaminen

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunktiiviseen (disjunktiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

  $$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \quad (1)$$

- Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

  $$\alpha \rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \quad (2)$$

- Siirrä negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

  $$\begin{array}{lll} \neg\neg\alpha & \rightsquigarrow & \alpha & (3) \\ \neg(\alpha \vee \beta) & \rightsquigarrow & \neg\alpha \wedge \neg\beta & (4) \\ \neg(\alpha \wedge \beta) & \rightsquigarrow & \neg\alpha \vee \neg\beta & (5) \end{array}$$

- (KNM) Lopuksi siirrä $\wedge$-konnektiivit $\vee$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & \rightsquigarrow & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) & (6) \\ (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma & \rightsquigarrow & (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) & (7) \end{array}$$

Tai (DNM) siirrä $\vee$-konnektiivit $\wedge$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\begin{array}{lcll} \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & \rightsquigarrow & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) & (8) \\ (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma & \rightsquigarrow & (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) & (9) \end{array}$$

Huomio. Muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin, joten lopputuloksena saadaan mille tahansa lauseelle $\alpha \in \mathcal{L}$ konjunktiivinen tai disjunktiivinen normaalimuoto.

Esimerkki. Muutetaan lause $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ konjunktiiviseen ja disjunktiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{array}{ll} A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C) & \\ A \vee B \rightarrow (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) & (1) \\ \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) & (2) \\ (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) & (4) \end{array}$$

Konjunktiivinen normaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) & \textbf{(7)} \\ ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) & \textbf{(6)} \\ ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) & \textbf{(6)} \\ (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B) & \end{array}$$

Disjunktiivinen normaalimuoto:

$$\begin{array}{ll} (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) & \textbf{(8)} \\ (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B) & \textbf{(9)} \end{array}$$

Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet A ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- Joukko klausuuleita S edustaa klausuuliensa konjunktiota.

Huomaa ero: $\neg A \vee B \vee \neg A \rightsquigarrow \{\neg A, B\}$.

Huomio. Konjunktiivinen normaalimuoto vastaa klausuulijoukkoa.

Esimerkki. Konjunktiivista normaalimuotoa
$(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on
$\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

Lauselogiikan ja predikaattilogiikan suhde

- Predikaattilogiikka on lauselogiikan yleistys, jonka syntaksi ja semantiikka ovat monimutkaisemmat.
- Lauselogiikka saadaan predikaattilogiikan erikoistapauksena: atomiset lauseet vastaavat 0-paikkaisia predikaatteja.
- Toisaalta predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi. Olkoon Σ predikaattilogiikan lausejoukko.
  1. Muunnetaan Σ klausuulijoukoksi S siten, että Σ on toteutumaton $\iff$ S on toteutumaton:
     $\Sigma \rightsquigarrow$ prenex-muoto $\rightsquigarrow$ skolemointi $\rightsquigarrow$ KNM $\rightsquigarrow S$
  2. S on toteutumaton $\iff$ S:n Herbrand-instanssien joukon S' äärellinen osajoukko $S'' \subseteq S'$ on toteutumaton.

Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause α, joka on muotoa $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \phi$, missä kukin $\mathcal{Q}_i$ on kvanttori ($\forall$ tai $\exists$), ja alikaava ϕ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

Esimerkki. Seuraavat lauseet ovat prenex-normaalimuodossa:

$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x,y,z) \rightarrow (Q(y,z,w) \rightarrow R(z,w,x)))$ $\forall x \exists y\ P(x,y)$

Jokainen predikaattilogiikan lause voidaan muuttaa loogisesti ekvivalenttiin prenex-normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \psi &\quad\rightsquigarrow\quad \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi &\quad\rightsquigarrow\quad (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

2. Viedään lauserakenteen negaatiot sisään ja tuodaan kvanttorit ulos (z on uusi muuttuja):

$$\begin{aligned} \neg\neg\varphi &\quad\rightsquigarrow\quad \varphi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \vec{\mathcal{Q}}x \neg\forall y \varphi &\quad\rightsquigarrow\quad \vec{\mathcal{Q}}x \exists y \neg\varphi \\ \vec{\mathcal{Q}}x \neg\exists y \varphi &\quad\rightsquigarrow\quad \vec{\mathcal{Q}}x \forall y \neg\varphi \\ \vec{\mathcal{Q}}x (\forall y \varphi \vee \psi) &\quad\rightsquigarrow\quad \vec{\mathcal{Q}}x \forall z (\varphi(y/z) \vee \psi) \end{aligned}$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

Skolemointi

Olkoon $\vec{Q}x\phi$ prenex-normaalimuodossa s.e. $\vec{Q}x$ sisältää kvanttorin $\exists x_i$.

Skolemointi suoritetaan seuraavasti:

- Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan x_i uudella vakiolla c.
- Jos $\exists x_i$:tä edeltävät universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \ldots, \forall x_{n_m}$, poistetaan kvanttori $\exists x_i$, ja korvataan x_i:n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m})$, missä f on uusi funktiosymboli.

Huomio. Skolemointi ei säilytä loogista ekvivalenssia mutta säilyttää toteutuvuuden.

Klausuulimuoto predikaattilogiikassa

Mikä tahansa predikaattilogiikan lause voidaan saattaa klausuulimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Haetaan prenex-normaalimuoto.
2. Muunnetaan tämä konjunktiivinen normaalimuotoon.
3. Mikäli KNM sisältää eksistenssikvanttoreita, skolemoidaan.
4. Kirjoitetaan klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja).

Esimerkki. Haetaan klausuuliesitys lauseelle
$\forall x(\neg(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)) \vee R(x))$:

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,z)) \vee R(x)) && (1)\\
&\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,z) \vee R(x))) && (2)\\
&\rightsquigarrow \quad \forall x((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,f(x)) \vee R(x))) && (3)\\
&\rightsquigarrow \quad \{\{P(x), R(x)\}, \{\neg Q(x,f(x)), R(x)\}\} && (4)
\end{aligned}$$

Herbrand-mallit

- Klausuulijoukon S *Herbrand-universumi* U_S on niiden muuttujattomien termien joukko, joka voidaan muodostaa S:ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos S:ssä ei esiinny vakio- ja funktiosymboleja, Herbrand-universumi $U_S = \{c\}$.
- Klausuulijoukon S *Herbrand-kanta* B_S koostuu atomisista lauseista, jotka voidaan konstruoida käyttäen S:ssä esiintyviä predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin termejä.
- Klausuulijoukon S *Herbrand-mallit* ovat Herbrand-kannan B_S osajoukkoja ja ne voidaan tulkita lauselogiikan totuusjakeluiksi.
- Klausuulijoukon S *Herbrand-instanssien* joukko S' saadaan korvaamalla S:n klausuulien muuttujat klausuuli klausuulilta kaikilla mahdollisilla U_S:n termien kombinaatioilla.

Esimerkki. Olkoon klausuulijoukko $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x,x))), P(c)\}$.

Lausejoukossa esiintyvät vakio c ja funktiosymboli $f(\cdot,\cdot)$.

- Herbrand-universumi $U_S = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c),f(c,c)), \ldots\}$.
- Herbrand-kanta $B_S = \{P(c), Q(c), P(f(c,c)), Q(f(c,c)), \ldots\}$.
- Esim. $\{P(c), P(f(c,c))\}$ on S:n Herbrand-malli.
- $S' = \{P(c), \neg P(c) \vee Q(f(c,c))), \neg P(f(c,c)) \vee Q(f(f(c,c),f(c,c)))), \ldots\}$.

Tietämyksen esittäminen

Tietämyksen esitämisen kannalta on usein järkevää nimetä universumin alkiot yksikäsitteisesti:

- Jokaisen vakiosymbolin viitattava eri alkioon (unique names):

$$\neg(a = b), \neg(b = c), \neg(c = a)$$

- Ei muita objekteja kuin nimetyt (domain closure):

$$\forall x(x = a \vee x = b \vee x = c)$$

☞ Voidaan rajautua Herbrand-mallien tarkasteluun

☞ Jos klausuulimuodossa ei esiinny funktiosymboleja, Herbrand-instansseja muodostuu äärellinen määrä ja keskeiset päättelyongelmat säilyvät tällöin ratkeavina.

Johtopäätös

Lauselogiikka on monien sovellusten kannalta riittävä:

- Tarvittaessa muuttujien avulla rakententeeltaan samankaltaisia lauseita voidaan pakata yhdeksi lauseeksi: esim. $P(x) \rightarrow Q(x)$.
- Ongelmaksi jää tällöin instantioinnin järjestäminen (tehdäänkö instantiointi kerralla vai tarpeen mukaan).
- Yksi mahdollisuus on rajoittaa/kontrolloida instantiointia domain-predikaattien $D(x)$ avulla: $(D(x) \wedge P(x) \rightarrow Q(x))$.