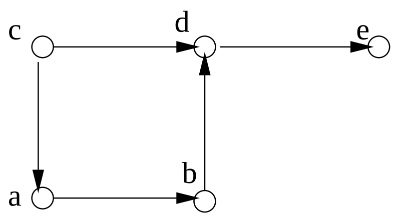
Tik-79.144 **Syksy 1999**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä II
Ratkaisut 1
16.9.1999

Graafi G:



Graafin esittämiseksi logiikalla määritellään propositiot:

$$V_a ='' \; a \text{ on solmu}''.$$
$$E_{ab} ='' \text{ solmusta } a \text{ on kaari solmuun } b''.$$

Graafi G voidaan siis esittää propositiojoukolla:

$$\{V_a, V_b, V_c, V_d, V_e, E_{ab}, E_{ac}, E_{bd}.E_{cd}.E_{de}\}$$

1. a) Määritellään joukko uusia propositioita:

$$S_a ='' \; a \text{ kuuluu solmupeittoon.}''$$

Solmupeitto-ongelman määrittely lauselogiikalla jakautuu kahteen osaan

(a) Lauseiden täytyy varmistaa, että ainakin toinen jokaisen kaaren päätepisteistä kuuluu peittoon. Tämä saavutetaan ottamalla lausejoukkoon mukaan

$$E_{xy} \rightarrow S_x \vee S_y$$

kaikille mahdollisille x, y-pareille. Käännöksessä näiden lauseiden lukumäärä on $|E|$.

(b) Lauseiden täytyy varmistaa, että solmupeitossa mukana olevien solmujen määrä ei ole suurempi kuin k. Tämä saavutetaan lisäämällä lauseet:

$$\neg S_1 \vee \neg S_2 \vee \cdots \vee \neg S_k \vee \neg S_{k+1}$$

kaikille mahdollisille graafin solmujen $k+1$-alkioisille osajoukoille. Näiden osajoukkojen lukumäärä on $\binom{V}{k+1}$.

Koska yksittäisen graafin kaaret on kiinnitetty, voidaan ensimmäinen lauseskeema yksinkertaistaa muotoon

$$S_x \vee S_y,$$

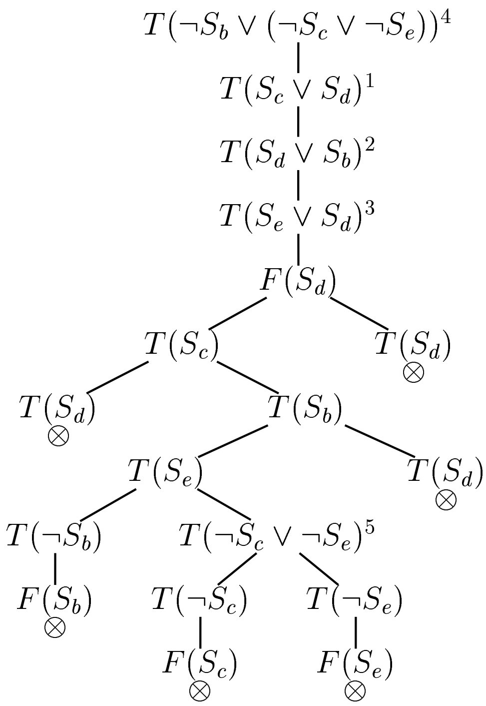
missä x ja y käyvät läpi kaikki kaaret.

Graafin G formaaliksi malliksi saadaan siten klausuulimuodossa:

$$\begin{gathered}
\{S_d \vee S_e\}, \{S_b \vee S_d\}, \{S_c \vee S_d\} \\
\{S_a \vee S_b\}, \{S_a \vee S_c\}, \{\neg S_a \vee \neg S_b \vee \neg S_c\}, \\
\{\neg S_a \vee \neg S_b \vee \neg S_d\}, \{\neg S_a \vee \neg S_b \vee \neg S_e\}, \{\neg S_a \vee \neg S_c \vee \neg S_d\}, \\
\{\neg S_a \vee \neg S_c \vee \neg S_e\}, \{\neg S_a \vee \neg S_d \vee \neg S_e\}, \{\neg S_b \vee \neg S_c \vee \neg S_d\}, \\
\{\neg S_b \vee \neg S_c \vee \neg S_e\}, \{\neg S_b \vee \neg S_d \vee \neg S_e\}, \{\neg S_c \vee \neg S_d \vee \neg S_e\}
\end{gathered}$$

b) Solmu d esiintyy kaikissa kaksialkioisissa solmupeitoissa, mikäli propositio S_d seuraa loogisesti ylläolevasta lausejoukosta. Looginen seuraavuus voidaan todeta lisäämällä lauseen negaatio lausejoukkoon, ja osoittamalla että siitä seuraa ristiriita.

Allaolevaan taulutodistukseen on otettu mukaan vain todistukseen tarvittavat lauseet.



2. Saavutettavuuden mallintaminen on huomattavasti hankalampaa kuin solmupeiton mallintaminen. Ongelman aiheuttaa saavutettavuuden tran-

sitiivisuus; mikäli solmusta a päästään solmuun b ja solmusta b solmuun c, niin solmusta a päästään solmuun c.

Ensimmäisenä yrityksenä voisimme käyttää lauseskeemaa:

$$E_{xy} \to R_{xy}$$
$$R_{xy} \wedge E_{yz} \to R_{xz},$$

missä R_{xy} tarkoittaa "solmusta x on yhteys solmuun y".

Lausejoukon malleissa R_{xy} on aina tosi, kun solmujen välillä on yhteys. Valitettavasti lausejoukolle löytyy myös malli, jossa kaikki R_{xy}:t ovat tosia riippumatta niiden välisistä yhteyksistä, joten ratkaisu ei vielä kelpaa.

Tässä vaiheessa meillä on kaksi perusvaihtoehtoa;

(a) Voimme siirtyä tarkastelemaan loogista seuraavuutta: Solmujen x ja y välillä on yhteys, jos ja vain jos R_{xy} seuraa loogisesti lausejoukosta.

(b) Voimme täydentää lausejoukkoa siten, että kiellämme R_{xy}:n esiintymisen mikäli x:n ja y:n välillä ei ole yhteyttä. Valitettavasti tämä ei ole yleisessä tapauksessa mahdollista ilman, että määrittelemme suuren joukon uusia atomeja, jotka kertovat kullekin solmulle koko reitin alkutilasta lopputilaan.

    Silmukattomalle graafille täydentäminen onnistuu predikaattilogiikassa käyttämällä Clarkin täydennystä:

$$\forall x, y : R_{xy} \leftrightarrow E_{xy} \vee \exists z (R_{xz} \wedge E_{yz})$$

    Käännettäessä lause propositiologiikkaan eksistenssikvanttori korvataan kaikkien mahdollisten muuttujasidontojen disjunktiolla.

    Esim.:

$$R_{ad} \leftrightarrow E_{ad} \vee (R_{ac} \wedge E_{cd}) \vee (R_{ab} \wedge E_{bd}) \vee (R_{ad} \wedge E_{dd}) \vee (R_{ae} \wedge E_{ed})$$