Tik-79.154 **Syksy 1997**
Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä II
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. a) Käytetään lyhennysmerkintä $s^n(0) = n$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\emptyset) &= \overline{\{p(0,0)\}} \\
\Gamma^2(\emptyset) &= \{q(0,0), r(0), dom(0), dom(1), \ldots\} \\
\Gamma^3(\emptyset) &= \overline{\{p(0,0), p(1,0)\}} \\
\Gamma^4(\emptyset) &= \{q(0,0), q(1,0), r(0), dom(0), dom(1), \ldots\} \\
&\vdots \\
\Gamma^{2n+1}(\emptyset) &= \overline{\{p(0,0), \ldots, p(n,0)\}} \\
\Gamma^{2n+2}(\emptyset) &= \{q(0,0), \ldots, q(n,0), r(0), dom(0), dom(1), \ldots\} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega}(\emptyset) &= \{q(i,0), dom(i)\}_{i=0}^{\infty} \cup \{r(0), r(1)\} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega\cdot 2}(\emptyset) &= \{q(i,j), dom(i)\}_{\substack{0\le i\le\infty \\ 0\le j\le 1}} \cup \{r(0), r(1), r(2)\} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega\cdot 3}(\emptyset) &= \{q(i,j), dom(i)\}_{\substack{0\le i\le\infty \\ 0\le j\le 2}} \cup \{r(0), r(1), r(2), r(3)\} \\
&\vdots \\
\left(\Gamma^2\right)^{\omega^2}(\emptyset) &= \{q(i,j), r(i), dom(i)\}_{\substack{0\le i\le\infty \\ 0\le j\le\infty}}
\end{aligned}
$$

b) Koska $\Gamma(\emptyset) = \{a, b, c, d\}$ WF-malli on tyhjä. Lasketaan stabiilit mallit.

not a	oletus
b	$b \leftarrow$ not a
c	$c \leftarrow b$
not d	koska $d \leftarrow$ not c, a ei voida käyttää (not a)

Atomilauseiden totuusarvot ovat nyt määritelty. Tarkastellaan jos $\{b, c\}$ on stabiili malli:

$$\Gamma(\{b, c\}) = \{b, c\}$$

implikoi että $\{b, c\}$ on ensimmäinen malli. Peruutetaan yli viimeinen oletus not a.

a	oletus, peruutettu
not b	a saadaan ainoastaan jos not b ja not d
not d	
c	$c \leftarrow$ not d

Kun

$$\Gamma(\{a, c\}) = \{a, c\}$$

niin $\{a, c\}$ on toinen stabiili malli. Muita malleja ei ole koska ei ole enää oletuksia jäljellä.

c) Koska $\Gamma(\emptyset) = \{a, b, c, d\}$ WF-malli on tyhjä. Lasketaan stabiilit mallit.

not a	oletus
b	$b \leftarrow$ not a
not d	koska $d \leftarrow$ not c, a ei voida käyttää (not a)
c	$c \leftarrow$ not d, b

ja

$$\Gamma(\{b, c\}) = \{b, c\}$$

implikoi että $\{b, c\}$ on stabiili. Peruutetaan yli viimeinen oletus.

a	oletus, peruutettu
not b	a saadaan ainoastaan jos not b ja not d
not d	
not c	koska $c \leftarrow$ not d, b ei voida käyttää (not b)
d	$d \leftarrow$ not c, a

mikä on ristiriita. Muita malleja ei löydy.

2. a) Oletetaan että $edge(u,v)$ on lause jos $\langle u,v\rangle \in E$. Käytetään predikaatti $inV'(X)$ ilmaisemaan että solmu X on joukossa V'. Silloin

$$inV'(X) \leftarrow edge(X,Y), \text{not } inV'(Y)$$

sanoo että $u \in V'$ tai $v \in V'$ jos $\langle u,v\rangle \in E$. Joukon V' koko voidaan rajoittaa K:hon lisäämällä lausejoukko

$$\{false \leftarrow inV'(v_1), \ldots, inV'(v_{K+1}) \mid v_1, \ldots, v_{K+1} \in V\}$$

kunhan etsitään malleja, jotka eivät sisällä $false$. Tämä voidaan esimerkiksi varmistaa säännöllä $f \leftarrow \text{not } f, false$. Huomatkaa että tämä käännös löytää vain minimaaliset solmupeitot.

b) Käytetään predikaatti $ninV'(X)$, joka sanoo että solmu X ei ole joukossa V'. Nyt ehto $u \notin V'$ tai $v \notin V'$ jos $\langle u,v\rangle \in E$ voidaan taata lauseella

$$ninV'(X) \leftarrow edge(X,Y), \text{not } ninV'(Y).$$

Huomataan että jos M on stabiili malli ja $ninV'(v) \in M$ ja kaikilla u siten että $edge(u,v)$ pätee $ninV'(u) \in M$ niin $ninV'(v)$ ei voida päätellä säännöistä

$$ninV'(v) \leftarrow edge(v,Y), \text{not } ninV'(Y)$$

ja tällöin $ninV'(v) \notin M$ mikä on ristiriita. Eli toinen ehto on automaattisesti täytetty.