Slide 1

Davis-Putnam -menetelmä

- Tehokkaimmat nykyiset lauselogiikan ratkaisumenetelmät pohjautuvat Davis-Putnam menetelmään [1960] (oikeastaan [Davis-Logemann-Loveland, 1962]).
- Refutaatio-menetelmä: lause P todistetaan aloittamalla lauseesta $\neg P$ ja johtamalla ristiriita:

  Lause $\neg P$ muunnetaan konjunktiiviseen normaalimuotoon klausuulijoukoksi, joka osoitetaan toteutumattomaksi.
- Voidaan käyttää myös löytämään malli klausuulijoukolle.
- Täydellinen menetelmä: jokaiselle klausuulijoukolle päättää, onko joukko toteutuva vai ei.

Slide 2

Perusidea

- Tutkitaan klausuulijoukkojen joukon toteutuvuutta:

  Klausuulijoukkojen joukko on toteutuva joss ainakin yksin sen klausuulijoukoista on toteutuva.
- Klausuulijoukkoja muunnetaan, kunnes on ilmeistä, ovatko ne toteutuvia vai ei (eliminoimalla toteutuneet klausuulit ja muista klausuuleista epätodet literaalit).

  (i) Tyhjä klausuulijoukko on toteutuva.
  (ii) Tyhjän klausuulin sisältävä klausuulijoukko ei ole toteutuva.
- Muunnokset säilyttävät toteutuvuuden:

  Jos klausuulijoukko on ennen muunnosta toteutuva, on se myös sen jälkeen.

Slide 3

Määritelmiä

- Literaalin L *komplementti* $\overline{L}$:
  Olkoon A atomilause. $\overline{A} = \neg A$ ja $\overline{\neg A} = A$.
- *Tyhjä klausuuli*: $\perp$
  Esim. Jos klausuulista $A \vee \neg B$ poistetaan literaalit A ja $\neg B$, jäljelle jää tyhjä klausuuli $\perp$.

  Tyhjä klausuuli $\perp$ on jokaisessa mallissa epätosi.
- Esikäsittely:

  (i) Poistetaan kustakin klausuulista moneen kertaan esiintyvät literaalit.

  (ii) Poistetaan klausuulit, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti.

Slide 4

Muunnossäännöt

Yhden literaalin sääntö (One-literal rule):

Olkoon klausuulijoukossa S yhden literaalin klausuuli L.

Muunnetaan S poistamalla
(i) kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L ja
(ii) muista klausuuleista literaali $\overline{L}$ (yksikköresoluutio).

(Malliehto: L tosi).

Esimerkki. Olkoon $S = \{\neg A, A \vee B \vee C, \neg A \vee D\}$.

Yhden literaalin sääntö muuntaa joukon S muotoon

$\{B \vee C\}$.

Malliehto: $\neg A$ tosi.

Slide 5

Komplementti puuttuu -sääntö (Affirmative-negative rule):

Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalin L muttei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalin $\overline{L}$.

Muunnetaan S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L.

(Malliehto: L tosi).

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee C, \neg A \vee \neg C\}$.

Komplementti puuttuu -sääntö muuntaa joukon S muotoon

$\{\neg A \vee \neg C\}$.

Malliehto: $\neg B$ tosi.

Slide 6

Peittosääntö (Subsumption rule):

Olkoon klausuulijoukossa S klausuulit C_1 ja C_2 siten, että C_1 peittää klausuulin C_2 (jokainen klausuulin C_1 literaali esiintyy myös klausuulissa C_2).

Muunnetaan S poistamalla C_2.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Peittosääntö muuntaa joukon S muotoon

$\{A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Huom! Ei malliehtoa.

Slide 7

Haarautumissääntö (Splitting rule):

Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalin L ja klausuuli, joka sisältää literaalin $\overline{L}$.

Muunnetaan S kahdeksi joukoksi S_L ja $S_{\overline{L}}$ missä

S_L saadaan joukosta S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L ja muista klausuuleista literaali $\overline{L}$ (malliehto: L tosi).

$S_{\overline{L}}$ saadaan joukosta S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin $\overline{L}$ ja muista klausuuleista literaali L (malliehto: $\overline{L}$ tosi).

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee \neg C, \neg A \vee \neg B\}$.

Haarautumissääntö muuntaa joukon S kahdeksi joukoksi

$S_A = \{\neg B\}$ (malliehto: A tosi) ja

$S_{\neg A} = \{\neg B \vee \neg C\}$ (malliehto: $\neg A$ tosi).

Slide 8

DP-todistus

- *DP-johto* lähtien klausuulijoukkojen joukosta B on äärellinen jono $B_1, B_2, \ldots, B_n$ klausuulijoukkojen joukkoja missä $B_1 = B$ ja muutoin joukko B_i on saatu edellisestä muuntamalla jokin sen klausuulijoukko käyttäen jotain neljästä edellä annetusta säännöstä.
- Johto on *onnistunut*, jos se päättyy joukkoon, jossa jokainen klausuulijoukko sisältää tyhjän klausuulin.
- Johto on *epäonnistunut*, jos se päättyy joukkoon, jossa on tyhjä klausuulijoukko.
- Lauseen P *DP-todistus* saadaan muuntamalla $\neg P$ klausuulijoukoksi S ja löytämällä joukosta $\{S\}$ lähtevä onnistunut DP-johto.

Slide 9

- DP-todistus voidaan esittää puuna:

  Juuressa on tutkittavan lauseen negaatiota vastaava klausuulijoukko ja kukin haara vastaa rakennettavan klausuulijoukkojen joukon yhtä klausuulijoukkoa.

- Epäonnistunut DP-johto antaa klausuulijoukolle mallin:

  Otetaan malli, joka täyttää tyhjään klausuulijoukkoon johtaneen muunnossääntöketjun yhteydessä saadut malliehdot.

Slide 10

Esimerkki. Todistetaan $((p \to q) \land (q \to p) \land (p \to \neg q)) \to (p \land q)$.

(i) Muunnetaan lauseen negaatio $\neg(((p \to q) \land (q \to p) \land (\neg p \to q)) \to (p \land q))$ klausuulimuotoon $\{\neg p \lor q, \neg q \lor p, p \lor q, \neg p \lor \neg q\}$.

(ii) Haetaan onnistunut DP-johto (esitetään klausuulijoukkojen joukkoa puuna; malliehdot suluissa).

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\{\neg p \lor q, \neg q \lor p,} \\
\multicolumn{2}{c}{p \lor q, \neg p \lor \neg q\}} \\
(p) & (\neg p) \\
\{q, \neg q\} & \{\neg q, q\} \\
(q) & (\neg q) \\
\{\bot\} & \{\bot\}
\end{array}
$$

Slide 11

Esimerkki. Tutkitaan, onko lause $((r \to p \lor q) \land (p \lor q) \land (r \to \neg q) \land (q \lor s) \land (s \to r)) \to (s \land r)$ pätevä.

(i) Lauseen negaatio klausuuleina $\{\neg r \lor p \lor q, p \lor q, \neg r \lor \neg q, q \lor s, \neg s \lor r, \neg s \lor \neg r\}$

(ii) Haetaan DP-johtoa.

(iii) Epäonnistunut haara (klausuulijoukko tyhjä) antaa alkuperäiselle klausuulijoukolle mallin $\{p, q\}$.

(iv) Klausuulijoukko on ekvivalentti alkuperäisen lauseen negaation kanssa, joten alkuperäiselle lauseelle saadaan vastamalli.

$$
\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{\{\neg r \lor p \lor q, p \lor q, \neg r \lor \neg q,} \\
\multicolumn{2}{c}{q \lor s, \neg s \lor r, \neg s \lor \neg r\}} \\
\multicolumn{2}{c}{\text{(peittosääntö)}} \\
\multicolumn{2}{c}{\{p \lor q, \neg r \lor \neg q, q \lor s,} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg s \lor r, \neg s \lor \neg r\}} \\
\multicolumn{2}{c}{(p)} \\
\multicolumn{2}{c}{\{\neg r \lor \neg q, q \lor s, \neg s \lor r, \neg s \lor \neg r\}} \\
(\neg r) & (r) \\
\{q \lor s, \neg s\} & \{\neg q, q \lor s, \neg s\} \\
(\neg s) & (\neg q) \\
\{q\} & \{s, \neg s\} \\
(q) & (s) \\
\{\} & \{\bot\}
\end{array}
$$

Slide 12

Teoreema 1 (Virheettömyys ja täydellisyys)
(i) Jos lauseelle P yritetään DP-todistusta soveltamalla sääntöjä, kunnes mikään sääntö ei ole sovellettavissa, saadaan äärellinen DP-johto, joka on joko onnistunut tai epäonnistunut.
(ii) Lause P on pätevä joss lauseelle P on olemassa DP-todistus.

Todistus. (i) Oletetaan, että johto ei ole onnistunut eikä epäonnistunut. Tällöin on olemassa ei-tyhjä klausuulijoukko, joka ei sisällä tyhjää klausuulia. Valitaan siitä klausuuli C, josta literaali L. Jos $\overline{L}$ esiintyy myös joukossa, voidaan käyttää haarautumissääntöä, muutoin komplementti puuttuu -sääntöä.
Toisaalta jokainen todistusyritys päättyy: Jokainen sääntö vähentää atomilauseiden määrää (paitsi peittosääntö, joka vähentää klausuulien määrää), joten sääntöjä voidaan soveltaa vain äärellisen monta kertaa. Siis äärellisellä askelmäärällä saadaan onnistunut/epäonnistunut DP-johto.

Slide 13

(ii) Jokainen muunnossääntö säilyttää toteutuvuuden:

Olkoon klausuulijoukkojen joukko B' on saatu joukosta B korvaamalla jokin B:n klausuulijoukko muunnossäännöllä saadulla klausuulijouko(i)lla. Tällöin B' on toteutuva joss B toteutuva.

Tällöin

P pätevä joss lauseen $\neg P$ klausuulimuoto S on toteutumaton
joss joukosta $\{S\}$ lähtevästä DP-johdosta saatava klausuulijoukkojen joukko on toteutumaton
joss jokainen klausuulijoukko sisältää tyhjän klausuulin.

Slide 14

Davis-Putnam vs. taulumenetelmä

- Taulumenetelmässä ei ole cut-sääntöä: $\dfrac{}{P \mid \neg P}$
- Davis-Putnam -menetelmällä voidaan polynomisesti simuloida taulutodistus klausuulijoukolle.

$$\frac{L_1 \vee L_2}{L_1 \mid L_2} \mapsto \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\{\ldots, L_1 \vee L_2, \ldots\}} \\ (L_1) & (\overline{L_1}) \\ \{\ldots,\ldots\} & \{\ldots, L_2, \ldots\} \end{array}$$

- Taulumenetelmällä ei voida polynomisesti simuloida DP-johtoa. Esim.: $\{\neg p \vee q, \neg q \vee p, p \vee q, \neg p \vee \neg q\}$

☞ Davis-Putnam -menetelmä on vahvempi todistusmenetelmä kuin taulut ilman cut-sääntöä.

Slide 15

Toteutustekniikkaa

Yleensä syvyyshaku klausuulijoukko kerrallaan, kunnes löytyy malli tai $\perp$.

$\mathrm{DP}(S, M)$
$\langle S', M' \rangle := \mathrm{simplify}(S, M)$;
if $S' = \emptyset$ **then** return M'
else if $\perp \in S'$ **then** return 'UNSAT'
else
  $L := \mathrm{choose}(S', M')$;
  $M'' := \mathrm{DP}(S' \cup \{L\}, M' \cup \{L\})$;
  if $M'' =$ 'UNSAT' **then** return $\mathrm{DP}(S' \cup \{\overline{L}\}, M' \cup \{\overline{L}\})$
  else return M''
  endif
endif

Slide 16

- $\mathrm{simplify}(S, M)$

  Yksinkertaistaa klausuulijoukkoa käyttäen muunnossääntöjä. Palauttaa yksinkertaistetun klausuulijoukon ja malliehdot.

  Yleensä ainakin yhden literaalin sääntö.
  Joskus komplementti puuttuu -sääntö.
  Peittosääntö ei yleensä käytössä.

- $\mathrm{choose}(S, M)$

  Heuristiikka, jolla valitaan atomilause A haarautumissääntöön ja se kumpi haara ($A/\neg A$) käydään läpi ensin.

  Tyypillinen idea: suositaan atomilauseita, jotka esiintyvät usein lyhyimmissä klausuuleissa.

  ☞ Heuristiikalla ratkaiseva vaikutus suorituskykyyn.

Slide 17

Esimerkki: Crawfordin ntab

simplify(S, M):

- Laskee joukosta S yksikköresoluutiolla (unit resolution):

$$\frac{L, \overline{L} \vee L_1 \vee \cdots \vee L_n}{L_1 \vee \cdots \vee L_n}$$

saatavat klausuulit.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A, \neg A \vee \neg B, C \vee B, \neg C \vee B \vee \neg D \vee A\}$.

Joukosta S saadaan yksikköresoluutiolla $\{\neg B, C, \neg D \vee A\}$.

- Yksikköresoluutiolla saatavat klausuulit voidaan laskea lineaarisessa ajassa.
- Lopetusehto: kaikilla atomilauseilla totuusarvo (malliehto).

Slide 18

choose(S, M):

- (i) Lasketaan kullekin atomilauseelle A hyvyysluku

$$\mathrm{score}(A) = \mathrm{pc}(A) * \mathrm{nc}(A) * 1024 + \mathrm{pc}(A) + \mathrm{nc}(A) + 1 \tag{1}$$

missä $\mathrm{pc}(A)$ $(\mathrm{nc}(A))$ on binääriklausuulien määrä, joissa A esiintyy positiivisena (negatiivisena).

- (ii) Valitaan k parasta atomilausetta ($k = v - 21 * va$ missä v on atomilauseiden määrä ja va on niiden atomilauseiden määrä, jolla on jo totuusarvo)
- (iii) Lasketaan kullekin atomilauseelle A uusi hyvyysluku kaavalla (1) missä nyt $\mathrm{pc}(A)$ $(\mathrm{nc}(A))$ kertoo, montako uutta binääriklausuulia saadaan yksikköresoluutiolla, kun joukkoon S lisätään A $(\neg A)$. Valitaan atomilause, jolla on paras ko. hyvyysluku.

Slide 19

Muita sääntöjä

- Literaali epäonnistuu -sääntö:

Jos tyhjä klausuuli saadaan joukosta $S \cup \{L\}$ yksikköresoluutiolla, poistetaan kaikki klausuulit, joissa esiintyy $\overline{L}$ ja muista klausuuleista literaali L.

(Malliehto: $\overline{L}$).

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee B, \neg B \vee C, \neg C \vee A\}$.
Joukosta $S \cup \{\neg A\}$ saadaan yksikköresoluutiolla $\{B, C, \neg C, \perp\}$.

Siis saadaan muunnettu klausuulijoukko $S = \{\neg B \vee C\}$
(malliehto: A).

Slide 20

- Literaalipari epäonnistuu -sääntö:

Jos tyhjä klausuuli saadaan joukosta $S \cup \{L_1, L2\}$ yksikköresoluutiolla, lisätään joukkoon S klausuuli $\overline{L_1} \vee \overline{L_2}$.

Esimerkki. Olkoon $S = \{A \vee \neg B \vee C, \neg C \vee A\}$.
Joukosta $S \cup \{\neg A, B\}$ saadaan yksikköresoluutiolla $\{C, A, \perp\}$.

Joten joukkoon S lisätään klausuuli $A \vee \neg B$.

- Poista 1-literaalit -sääntö:

Literaali L esiintyy täsmälleen yhdessä S:n klausuulissa $L \vee C_0$ ja $\overline{L}$ esiintyy k klausuulissa $\overline{L} \vee C_1, \ldots, \overline{L} \vee C_k$.

Korvataan joukossa S em. $k+1$ klausuulia k klausuulilla $C_0 \vee C_1, \ldots, C_0 \vee C_k$.

Slide 21

Arviointia

- Davis-Putnam -menetelmä on yksinkertainen toteuttaa tehokkaasti.
- Hakuavaruuden koko 2^v, missä v on klausuulijoukon atomilauseiden määrä.
- Tyypillisesti polynominen tilavaativuus.
- Kussakin hakuavaruuden pisteessä
  (a) yksinkertaistetaan klausuulijoukkoa
  (b) valitaan uusi atomilause haarautumista varten (hakuheuristiikka)
- Trade-off: mitä enemmän yksinkertaistetaan sitä vähemmän haarautumista.

Slide 22

- Tyypillinen ratkaisu:

  (i) Tehdään esikäsittely, jossa yksinkertaistetaan klausuulijoukkoa ja vähennetään muuttujien määrää.

  Esim. käyttämällä yhden literaalin, komplementti puuttuu, literaali epäonnistuu ja poista 1-literaalit sääntöä.
  (polynominen aikavaativuus)

  (ii) Kussakin hakupisteessä yksinkertaistaminen lineaarisessa ajassa (yksikköresoluutio).

  (iii) Kussakin hakupisteessä heuristiikka lineaarisessa ajassa (atomilauseiden esiintymistiheys/yksikköresoluutio).

  (iv) Ei käytetä monimutkaisia peruutusmenetelmiä.