T-79.149 Diskreetit rakenteet (2 ov)

Tentti pe 10.12.2004, 9–12 sali T1

Kuulustelija: Pekka Orponen, puh. (451)5246

LUENTOMONISTE JA HARJOITUSTEHTÄVIEN MALLIRATKAISUT SAA OLLA MUKANA. OHJELMOITAVAT JA MUUT SYMBOLILASKENTAKYKYISET LASKIMET KIELLETTY.

1. Tulkitse summa

$$S_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1} \cdot 2 + \binom{2n-2}{2} \cdot 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 2^n$$

   termin z^{2n} kertoimeksi sarjassa $S(z) = \sum_{k \geq 0} z^k (1+2z)^k$ (perustelu!), ja määritä tällä perusteella summan S_n arvo suljetussa muodossa. *8p.*

2. Määritä seuraavat generoivat funktiot suoraan ao. kombinatoristen perheiden rakenteen perusteella:

   (a) Tgf jonolle $\langle a_n \rangle$, missä $a_n =$ sellaisten numeroista 1 ja 2 koostuvien merkkijonojen lukumäärä, joiden numeroiden summa on n. (Laskemalla todetaan, että $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ jne.) *4p.*

   (b) Egf jonolle $\langle b_n \rangle$, missä $b_n =$ joukon $[n] = \{1, \ldots, n\}$ binääripuuositusten lukumäärä, so. sellaisten binääripuiden lukumäärä, joiden kussakin solmussa on jokin perusjoukon $[n]$ epätyhjä osajoukko, joukot ovat erillisiä ja yhdessä kattavat koko perusjoukon. (*Binääripuu* on järjestetty juurrettu puu, jonka jokaiseen solmuun juurtuu kaksi alipuuta, joista jompikumpi tai molemmat voivat olla tyhjiä. Piirtämällä ja laskemalla todetaan, että $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_3 = 43$ jne.) *4p.*

3. Arvioi kohtuulliseksi katsomallasi tarkkuudella seuraavien generoivien funktioiden kertoimien asymptoottista kasvunopeutta. Perusta arviosi suoraan funktioiden ominaisuuksiin, ratkaisematta ao. kertoimia eksplisiittisesti.

   (a) tgf $a(z) = \dfrac{1}{(1+2z)(1-2z)^2}$. *4p.*

   (b) egf $\hat{f}(z) = ze^{z^2}$, *3p.*

4. Arvioi Eulerin summakaavan avulla kertomafunktion $n!$ kasvunopeutta kertaluokan tarkkuudella, so. määritä jokin sellainen algebrallinen lauseke $f(n)$, että $n! = \Theta(f(n))$. (*Vihje:* Arvioi ensin funktiota $(n-1)!$.) *7p.*

Yhteensä 30p.