T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004
Harjoitus 8, 17.11.

1. Fibonacci-lukujen jonon tavallinen generoiva funktio on tunnetusti $f(z) = z/(1-z-z^2)$. Määritä tällä perusteella mahdollisimman tarkka arvio Fibonacci-luvun f_n, $n \geq 0$, suuruudelle, käyttäen hyväksi funktion $f(z)$ navoista saatavaa tietoa.

2. Bernoullin lukujen b_n eksponentiaalinen generoiva funktio on $\hat{b}(z) = z/(e^z - 1)$. Arvioi tällä perusteella lukujen b_n suuruusluokkaa. Miten tarkan arvion pystyt tekemään?

3. Meromorfisten generoivien funktioiden kerrointen suuruuden arviointia koskevassa luentojen Lauseessa 7.1 väitetään, että jos funktiolla $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ on pisteessä $z_0 \neq 0$ kertalukua m oleva napa, niin sen kontribuutio kertoimeen f_n on

$$-\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = (\frac{1}{z_0})^n \cdot P(n),$$

missä $P(n)$ on astetta $m-1$ oleva polynomi. Todista tämä väite (siis se, että em. residy on väitettyä muotoa), kun (a) $m = 1$, (b) $m \geq 1$. Tapauksessa $m = 1$ totea myös oikeaksi polynomille — tässä tapauksessa siis vakiolle — annettu eksplisiittinen lauseke $P = -\mathrm{Res}(f; z_0)/z_0$. (*Vihje:* Tarvittaessa voit katsoa ratkaisulle mallia H. Wilfin teoksen *generatingfunctionology* sivulta 174.)