T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004

Harjoitus 6, 27.10.

1. Aiemmin on todettu, että sekoituspermutaatioiden (engl. derangements) luokan egf on $\hat{d}(z) = e^{-z}/(1-z)$. Johda tästä yksinkertainen rekursiokaava n alkion sekoitusten määrälle. Keksitkö kaavalle myös kombinatorisen tulkinnan?

2. Olkoon $h(z) = \sum_{n \geq m} h_n z^n$, missä $h_m \neq 0$, formaali Laurent-sarja. Todista seuraavat tulokset:

   (a) $\mathrm{Res}(h'(z)) = 0$;

   (b) $\mathrm{Res}(h'(z)/h(z)) = m$.

3. Osoita yleistä potenssisarjojen Lagrange-inversiokaavaa (luentojen Lause 5.2) käyttäen oikeaksi sen seuraava, esim. puurakenteiden analysoinnin kannalta käyttökelpoinen muotoilu. Olkoot $f(z)$ ja $\phi(u)$ formaaleja potenssisarjoja, joilla on voimassa $\phi(0) = \phi_0 \neq 0$ ja $f(z) = z\phi(f(z))$. Tällöin on kaikilla $n \geq 1$:

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n.$$

   (*Vihje:* Tarkastele potenssisarjaa $\psi(u) = \frac{u}{\phi(u)}$.)

4. Johda n-solmuisten nimeämättömien juurrettujen järjestettyjen puiden ja n-solmuisten binääripuiden (juurretut järjestetyt puut, joiden jokaisella solmulla on 0, 1 tai 2 jälkeläistä) lukumääriä kuvaavat lausekkeet suoraan vastaavien tgf-konstruktioiden ja Lagrangen inversiokaavan avulla.