

## T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004

### Harjoitus 4, 13.10.

1. Painotetun kombinatorisen perheen  $\mathcal{A} = (A, w_A)$  “multipotenssi”  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = (C, w_C)$  määritellään seuraavasti. Multipotenssiperheen perusjoukon  $C$  muodostavat kaikki  $A$ :sta valitut “multijoukot”  $\{\alpha_1^{j_1}, \dots, \alpha_k^{j_k}\}$ , missä kukin  $\alpha_i \in A$  ja yläindeksi  $j_i$  merkitsee alkion  $\alpha_i$  kertalukua multijoukossaan. Perheen  $C$  olioiden painofunktio määritellään:

$$w_C(\{\alpha_1^{j_1}, \dots, \alpha_k^{j_k}\}) = j_1 w_A(\alpha_1) + \dots + j_k w_A(\alpha_k).$$

Osoita, että tämä konstruktio on tgf-kelpoinen, ja että sitä vastaava tgf-operaattori on

$$c(z) = \exp(a(z) + \frac{1}{2}a(z^2) + \frac{1}{3}a(z^3) + \dots).$$

(Ohje: Huomaa, että  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in A} \{\alpha\}^*$ .)

2. Sovella kombinatoristen konstruktioiden tekniikkaa (“operaattorimenetelmää”) seuraavien tavallisten generoivien funktioiden muodostamiseen:
  - (a) Annetun  $m$ -alkioisen perusjoukon  $n$ -alkioisten osajoukkojen määrä potenssikonstruktioita käyttäen. (Ohje: Mieti ensin, mikä on  $m$ -alkioisen joukon muodostaman kombinatorisen perheen tgf. Montako oliota siihen kuuluu? Mikä on niiden painojakauma?)
  - (b) Annetun  $m$ -alkioisen perusjoukon  $n$ -alkioisten “multiosajoukkojen” (toisteisten  $n$ -valintojen) määrä edellisen tehtävän multipotenssikonstruktioita käyttäen.
3. Tarkastellaan  $n$  identtisen pallon sijoitteluja  $k$  toisistaan erottuvaan lokeroon, so. luvun  $n$  järjestettyjä  $k$ -kompositioita  $n = n_1 + \dots + n_k$ . Määritä  $n$ :n  $k$ -kompositioiden tgf annetulla  $k$ , sekä sellaisten  $k$ -kompositioiden lukumäärät, joissa: (a)  $n_i \geq i$  kaikilla  $i = 1, \dots, k$ , (b)  $n$  ja kaikki  $n_i$ :t ovat parillisia, (c) kaikki  $n_i$ :t ovat parittomia. (Vihje: Annetun  $k$ -komposition kukin komponentti  $n_i$  voidaan ajatella  $n_i$ :n “pallon” tai “ykkösen” muodostamaksi jonoksi.)