T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004
Harjoitus 2, 29.9.

1. Olkoon $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ formaali potenssisarja. Todista seuraavat tulokset:

   (a) $F' = 0$, jos ja vain jos $F = a_0 =$ vakio;

   (b) $F' = F$, jos ja vain jos $F = a_0 \cdot \mathrm{Exp}(X)$.

2. Olkoot $F(X) = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, $G(X) = \sum_{m\geq 0} b_m X^m$ ja $F_i(X) = \sum_{k\geq 0} c_{ik} X^k$ $(i = 0, 1, \ldots)$ formaaleja potenssisarjoja. Todista seuraavat sarjojen tulon, äärettömän summan ja yhdistetyn sarjan derivointia koskevat säännöt:

$$\begin{aligned} D\, F(X)G(X) &= F'(X)G(X) + F(X)G'(X), \\ D \sum_{i\geq 0} F_i(X) &= \sum_{i\geq 0} F_i'(X), \\ D\, G(F(X)) &= G'(F(X)) \cdot F'(X). \end{aligned}$$

   Mitkä sarjojen kertoimia koskevat ehdot rajoittavat näiden sääntöjen soveltamista?

3. Olkoot $F(X) = \sum_{n\geq 1} a_n X^n$ ja $G(X) = \sum_{m\geq 1} b_m X^m$ formaaleja potenssisarjoja, joilla on $a_0 = b_0 = 0$ ja $a_1, b_1 \neq 0$. Osoita, että jos $F(G(X)) = X$, niin myös $G(F(X)) = X$. (Siten on annetulla sarjalla F samat “oikea” ja “vasen” käänteissarja $G = F^{[-1]}$.) Määritä formaalisti sarjan $\mathrm{Ln}(1 + X) = (\mathrm{Exp}(X) - 1)^{[-1]}$ kolme ensimmäistä kerrointa.