T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004

Kotitehtävät 2 (palautus 17.11. klo 12:15 mennessä)

1. Määritä seuraavien kombinatoristen perheiden eksponentiaaliset generoivat funktiot:

   (a) Permutaatiot, joiden kaikki syklit ovat parittoman pituisia.

   (b) Permutaatiot, jotka sisältävät ainakin yhden parillisen pituisen syklin.

2. *Metsä* on järjestämätön kokoelma epätyhjiä järjestämättömiä juurrettuja nimettyjä puita. ("Nimetyn puun" kaikki solmut on nimetty esim. eri kokonaisluvuilla. Kahta rakenteeltaan samanlaista, mutta eri lailla nimettyä puuta pidetään erilaisina. "Järjestämättömässä" puussa solmujen alipuiden vasen-oikea järjestyksellä ei ole merkitystä.) Tarkastellaan seuraavassa metsiä, joihin kuuluvat puut ovat kaikki enintään yhden korkuisia, lyhyemmin *1-metsiä*. Piirtämällä voidaan todeta, että esim. 0- ja 1-solmuisia 1-metsiä on 1 kpl kumpiakin, 2-solmuisia 1-metsiä on 3 kpl ja 3-solmuisia 1-metsiä on 10 kpl.

   (a) Muodosta n-solmuisten 1-metsien määrää kuvaava eksponentiaalinen generoiva funktio.

   (b) Muodosta edellisen perusteella rekursiokaava n-solmuisten 1-metsien määrän laskemiseksi ja määritä sitä käyttäen 4-solmuisten 1-metsien lukumäärä.

3. Määritä lauseke kieliopin

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & a \mid bT \\ T & \rightarrow & S \mid ST \end{array}$$

   tuottamien n-merkkisten merkkijonojen määrälle. (Jos kielioppiformalismi on sinulle vieras, kysy asiasta luennoijalta.)

4. Arvioi summan $\sum_{k=1}^{n} k \ln k$ arvoa tarkkuudella $O(1)$. (*Ohje:* Arvioi ensin summaa, jossa on ylärajana n:n sijaan $n-1$.) Minkä arvion saat tästä tulon $1^1 \cdot 2^2 \cdots n^n$ kasvunopeudelle n:n suhteen?