

T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004

Kotitehtävät 1 (palautus 20.10. klo 12:15 mennessä)

1. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt generoivien funktioiden avulla:

(a)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + n, \quad n \geq 1; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

2. Muodosta *harmonisen jonon* $\langle 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$ ja sen osasummien jonon $\langle 0, 1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \dots \rangle$ tavalliset generoivat funktiot.

3. (a) Tarkastellaan formaalia potenssisarjaa $F(X) = (\text{Exp}(X) - 1)/X = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} X^n$. Totea, että tällä on käänteissarja $B(X) = X/(\text{Exp}(X) - 1)$ ja määritä formaalisti sarjan $B(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$ kertoimet B_0, \dots, B_4 .

(b) Tehtävän (a)-kohdassa määriteltyjä kertoimia B_n sanotaan *Bernoullin luvuiksi*. Osoita, että ne toteuttavat rekursioyhtälön

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad n \geq 2.$$

(Vihje: Potenssisarjojen tulokaava.)

4. Muodosta seuraavien kombinatoristen perheiden tavalliset generoivat funktiot:

(a) Epätyhjät nimeämättömät järjestetyt juuretut puut, so. epätyhjät puut, joilla on erikseen osoitettu juurisolmu ja joiden kunkin solmun jälkeläisten kesken on määritelty järjestys vasemmalta oikealle.

(b) Binäärijonot, jotka eivät sisällä kahta peräkkäistä nollaa.

(c) Epätyhjät binääripuut, joiden juuren molemmat alipuut ovat saman muotoiset.

(d) Epätyhjät binääripuumetsät, so. epätyhjät järjestämättömät binääripuukoelmat.