

T-79.149 Diskreetit rakenteet (2 ov)

Tentti ke 12.12.01, 16–19 sali T1

Kuulustelija: Pekka Orponen

MUISTIINPANOJEN JA MUUN KIRJALLISEN MATERIAALIN KÄYTTÖ SALLITTU. OHJELMOITAVAT JA MUUT SYMBOLILASKENTAKYKYISET LASKIMET KIELLETTY.

1. Ratkaise generoivien funktioiden avulla rekursioyhtälö:

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1, \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^n, & n \geq 2. \end{cases}$$

2. *Metsä* on järjestämätön kokoelma epätyhjiä järjestämättömiä juurrettuja nimettyjä puita. (“Nimetyt puut” kaikki solmut on nimetty esim. eri kokonaisluvulla. Kahta rakenteeltaan samanlaista, mutta eri lailla nimettyä puuta pidetään erilaisina. “Järjestämättömässä” puussa solmujen alipuiden vasen-oikea järjestyksellä ei ole merkitystä.) Tarkastellaan seuraavassa metsiä, joihin kuuluvat puut ovat kaikki enintään yhden korkuisia, lyhyemmin *1-metsiä*. Piirtämällä voidaan todeta, että esim. 0- ja 1-solmuisia 1-metsiä on 1 kpl kumpiakkin, 2-solmuisia 1-metsiä on 3 kpl ja 3-solmuisia 1-metsiä on 10 kpl.

- (a) Muodosta n -solmuisten 1-metsien määrää kuvaava eksponentiaalinen generoiva funktio.
- (b) Muodosta edellisen perusteella rekursiokaava n -solmuisten 1-metsien määrän laskemiseksi ja määritä sitä käyttäen 4-solmuisten 1-metsien lukumäärä.

3. Arvioi kohtuulliseksi katsomallasi tarkkuudella seuraavien generoivien funktioiden kertoimien asymptoottista kasvunopeutta. Perusta arviosi suoraan funktioiden ominaisuuksiin, ratkaisematta ao. kertoimia eksplisiittisesti.

(a) $\text{tgf } a(z) = \frac{z(1+2z)}{(1-2z)^3}$.

(b) $\text{egf } \hat{f}(z) = e^{ze^z}$,

4. Arvioi summan $\sum_{k=1}^n (\ln k)^2$ arvoa tarkkuudella $O(1)$.