T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2001
Harjoitus 7, 7.11.

1. Todista oikeiksi seuraavat Riemann–Stieltjes -integraalin ominaisuudet, edellyttäen että kaavoissa esiintyvät integraalit ovat hyvin määritellyt:

   (a) Lineaarisuus:

$$\begin{aligned} \int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dg &= c_1 \int_a^b f_1\, dg + c_2 \int_a^b f_2\, dg, \\ \int_a^b f\, d(c_1 g_1 + c_2 g_2) &= c_1 \int_a^b f\, dg_1 + c_2 \int_a^b f\, dg_2. \end{aligned}$$

   (b) Yhteys Riemann-integraaliin: jos funktio g on jatkuvasti derivoituva, niin

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t)\, dt.$$

2. Olkoot f ja g jatkuvia funktioita ja $a, b \in \mathbf{Z}$. Todista oikeiksi seuraavat kaavat, edellyttäen että niissä esiintyvät integraalit ovat hyvin määritellyt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\, dg(\lceil t \rceil) &= \sum_{a \le k < b} f(k) \Delta g(k), \qquad \Delta g(k) = g(k+1) - g(k); \\ \int_a^b f(\lceil t \rceil)\, dg(t) &= \sum_{a < k \le b} f(k) \nabla g(k), \qquad \nabla g(k) = g(k) - g(k-1). \end{aligned}$$

   Totea edellisten kaavojen nojalla oikeaksi seuraava “osittaissummaussääntö”:

$$\sum_{a \le k < b} f(k) \Delta g(k) = \Big/_{a}^{b} f(k) g(k) - \sum_{a < k \le b} g(k) \nabla f(k).$$

3. Arvioi Eulerin summakaavan avulla seuraavia summia:

   (a) Summa $\sum_{1 \le k < n} k^{1/2}$ tarkkuudella $O(1)$.

   (b) Summa $\sum_{1 \le k < n} k^r$, $r \in \mathbf{N}$, tarkasti.