T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2001
Kotitehtävät 3 (palautus 10.12. klo 16:00 mennessä)

1. Arvioi säännöllisen lausekkeen
$$b^*a(b \cup c)^*ab^*$$
tuottamien n-merkkisten merkkijonojen määrää.

2. Harjoitusten 5 tehtävässä 3 johdettiin egf:t sellaisten permutaatioiden luokille, joissa (a) permutaation kaikki syklit ovat kolmen pituisia ($\hat{a}(z) = e^{z^3/3}$) ja (b) permutaation kaikki syklit ovat parillisen pituisia ($\hat{b}(z) = (1 - z^2)^{-1/2}$). Arvioi em. (a)- ja (b)-tyyppisten permutaatioiden lukumääriä suoraan annettujen egf:ien perusteella, ratkaisematta niiden kertoimia eksplisiittisesti.

3. Arvioi Darboux'n lauseen avulla kieliopin
$$S \to aSS \mid bS \mid c$$
tuottamien n-merkkisten merkkijonojen määrää.

4. Osoita Mellinin summakaavaa käyttäen, että
$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \beta n}{n} = \frac{\pi - \beta}{2},$$
kun $0 \leq \beta < 2\pi$. Sovella tulosta summan $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ arvon määrittämiseen.

   Ohjeita: Tarvitset todennäköisesti integrointisääntöä
$$\int_0^\infty t^{r-1} \sin t \, dt = \Gamma(r) \sin \frac{\pi r}{2} \qquad (-1 < \mathrm{Re}(r) < 1),$$
missä
$$\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t} \, t^{r-1} \, dt$$
on *Eulerin gammafunktio.* Gammafunktio $\Gamma(r)$ on määritelty kaikilla $r \in \mathbf{C}$ paitsi pisteissä $r = -n$, $n \in \mathbf{N}$, joissa sillä on yksinkertaiset navat ja vastaavat residyt $(-1)^n/n!$ Pisteissä $r = n$, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ puolestaan on voimassa $\Gamma(n) = (n-1)!$

   Tarvinnet myös *Eulerin zetafunktiota*
$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}.$$
Zetafunktio on määritelty kaikilla $s \in \mathbf{C}$ paitsi pisteessä $s = 1$, jossa sillä on yksinkertainen napa ja residy 1. Zetafunktion ja gammafunktion välillä on yhteys
$$\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{(2\pi)^s \, \zeta(1-s)}{2 \cos \frac{\pi s}{2}}.$$