

T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2001

Kotitehtävät 1 (palautus 17.10. klo 12:15 mennessä)

1. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt generoivien funktioiden avulla:

(a)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + n, & n \geq 1; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} s_0 = 0, \\ s_n = s_{n-1} + n^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

2. Tarkastellaan formaalia potenssisarjaa $F(X) = (\text{Exp}(X) - 1)/X = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} X^n$. Totea, että tämä sarja on kääntyvä ja määritä sen käänteissarjan $B(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$ kertoimet B_0, \dots, B_4 .
3. Edellisessä tehtävässä määriteltyjä kertoimia B_n sanotaan *Bernoullin luvuiksi*; osoita että ne toteuttavat rekursioyhtälön

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad n \geq 2.$$

4. *Involuutio* on permutaatio, joka on oma käänteiskuvauksensa. (Sykliahjotelmaa ajatellen tämä tarkoittaa siis sitä, että permutaatiossa on vain yhden ja kahden pituisia syklejä.) Muodosta yksinkertainen rekursiokaava n alkion involuutioiden määrälle, ja tämän perusteella involuutioiden luokan egf. (*Vihje*: Osoita joukon $[n] = \{1, \dots, n\}$ involuutiot sen mukaan, mitä muita alkioita on samassa syklissä alkion n kanssa.)