

3.8 Yhteydettömien kielten rajoituksista

Yhteydettömille kielille on voimassa säännöllisten kielten pumppauslemman vastine. Nyt kuitenkin merkkijonoa on pumpattava samanaikaisesti kahdesta paikasta.

Lemma 3.9 (“uvwxy-lemma”) Olkoon L yhteydetön kieli. Tällöin on olemassa sellainen $n \geq 1$, että mikä tahansa $z \in L$, $|z| \geq n$, voidaan jakaa osiin $z = uvwxy$ siten, että

- (i) $|vx| \geq 1$,
- (ii) $|vwx| \leq n$,
- (iii) $uv^iwx^iy \in L$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \dots$



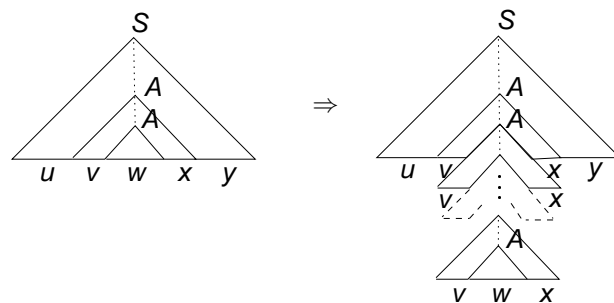
Timo Latvala kevät 2005

Todistus. Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ Chomskyn normaalimuotoinen kielioppi L :lle. Tällöin missä tahansa G :n jäsenyspuussa, jonka korkeus on h , on enintään 2^h lehteä. Toisin sanoen, mikä tahansa $z \in L$ jokaisessa jäsenyspuussa on polku, jonka pituus on vähintään $\log_2 |z|$. Olkoon $k = |V - \Sigma|$ kieliopin G välikkeiden määrä. Asetetaan $n = 2^{k+1}$. Tarkastellaan jotakin $z \in L$, $|z| \geq n$, ja sen jotakin jäsenyspuuta.

Edellisen nojalla puussa on polku, jonka pituus on $\geq k + 1$; tällä polulla on siis jonkin välikkeen toistuttava — itse asiassa jo polun $k + 2$ alimman solmun joukossa. Olkoon A jokin tällainen välike.



Timo Latvala kevät 2005

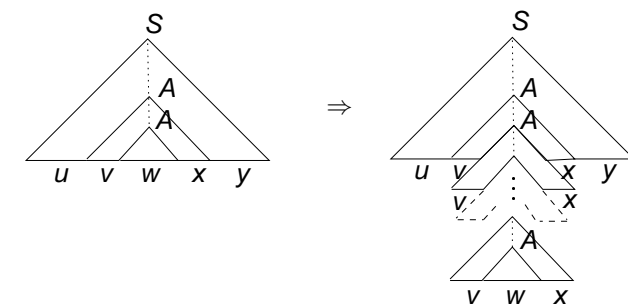


Merkkijono z voidaan nyt osittaa $z = uvwxy$, missä w on A :n alimmasta ilmentymästä tuotettu osajono ja vwx seuraavaksi ylemmästä A :n ilmentymästä tuotettu osajono; osajonot saadaan johdosta

$$S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^* uvAxy \Rightarrow^* uvwx^i y.$$



Timo Latvala kevät 2005



Koska siis $S \Rightarrow^* uAy$, $A \Rightarrow^* vAx$ ja $A \Rightarrow^* w$, osajonoja v ja x voidaan “pumppata” w :n ympärillä:

$$S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^* uvAxy \Rightarrow^* uv^2Ax^2y \Rightarrow^* \dots \Rightarrow^* uv^iAx^iy \Rightarrow^* uv^iwx^iy.$$

Siten $uv^iwx^iy \in L$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \dots$



Timo Latvala kevät 2005

Koska kielioppi G on Chomskyn normaalimuodossa ja $A \Rightarrow^* vAx$, on oltava $|vx| \geq 1$.

Koska edelleen välikkeen A valinnan perusteella sen toiseksi ylin ilmentymä on enintään korkeudella $k + 1$ jäsennyspuun lehdistä, on tähän ilmentymään juurtuvan alipuun tuotokselle voimassa pituusraja $|vwx| \leq 2^{k+1} = n$. \square



Esimerkki. Tarkastellaan kieltä

$$L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}.$$

Oletetaan, että L olisi yhteydetön; valitaan parametri n lemmän mukaisesti ja tarkastellaan merkkijonoa $z = a^n b^n c^n \in L$.

Lemman 3.9 mukaan z voidaan jakaa pumpattavaksi osiin

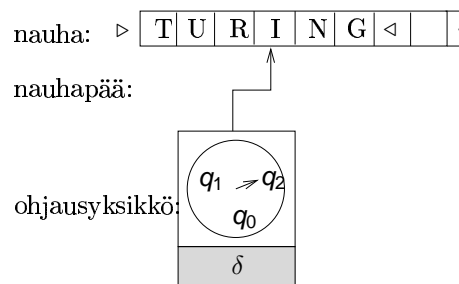
$$z = uvwxy, \quad |vx| \geq 1, \quad |vwx| \leq n.$$

Viimeisen ehdon takia merkkijono vx ei voi sisältää sekä a :ta, b :tä että c :tä. Merkkijonossa $uv^0wx^0y = uwy$ on siten ylijäämä jotakin merkkiä muihin merkkeihin nähden, eikä se voi olla kielen L määritelmässä vaadittua muotoa, vaikka lemmän mukaan pitäisi olla $uwy \in L$.



4. TURINGIN KONEET

Alan Turing 1935–36.



Turingin kone on kuin äärellinen automaatti, jolla on käytössään nauha. Kone voi siirtää nauhapäätä vasemmalle tai oikealle; se voi myös lukea tai kirjoittaa nauhapään kohdalla olevan merkin. Nauha on oikealle rajaton.

Churchin–Turingin teesi: Mikä tahansa mekaanisesti ratkeava ongelma voidaan ratkaista Turingin koneella.



Turingin koneen kanssa ekvivalentteja laskentamalleja:

- ▶ Gödelin–Kleenen rekursiivisesti määritellyt funktiot (1936),
- ▶ Churchin λ -kalkyyli (1936),
- ▶ Postin (1936) ja Markovin (1951) merkkijonomuunnossysteemit, kaikki nykyiset ohjelmointikielät.

Turingin koneet \equiv ohjelmointikieli.



Määritelmä 4.1 Turingin kone on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}),$$

missä:

- ▶ Q on koneen *tilojen* äärellinen joukko;
- ▶ Σ on koneen *syöteaakkosto*;
- ▶ $\Gamma \supseteq \Sigma$ on koneen *nauha-aakkosto* (ol. että $\triangleright, \triangleleft \notin \Gamma$);
- ▶ $\delta : (Q - \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times (\Gamma \cup \{\triangleright, \triangleleft\}) \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{\triangleright, \triangleleft\}) \times \{L, R\}$ on koneen *siirtymäfunktio*;
- ▶ $q_0 \in Q$ on koneen *alkutila*;
- ▶ $q_{\text{acc}} \in Q$ on koneen *hyväksyvä* ja
- ▶ $q_{\text{rej}} \in Q$ sen *hylkäävä lopputila*.



Siis: siirtymäfunktion arvoilta

$$\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$$

vaaditaan:

- (i) jos $b = \triangleright$, niin $a = \triangleright$;
- (ii) jos $a = \triangleright$, niin $b = \triangleright$ ja $\Delta = R$;
- (iii) jos $b = \triangleleft$, niin $a = \triangleleft$ ja $\Delta = L$.



Siirtymäfunktion arvon

$$\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$$

tulkinta:

Ollessaan tilassa q ja lukiessaan nauhamerkin (tai alku- tai loppumerkin) a , kone siirtyy tilaan q' , kirjoittaa lukemaansa paikkaan merkin b , ja siirtää nauhapäätä yhden merkkipaikan verran suuntaan Δ ($L \sim$ "left", $R \sim$ "right").

Sallittuja kirjoitettavia merkkejä ja siirtosuuntia on rajoitettu, mikäli $a = \triangleright$ tai \triangleleft , ja siirtymäfunktion arvo on aina määrittelemätön, kun $q = q_{\text{acc}}$ tai $q = q_{\text{rej}}$. Joutuessaan jompaan kumpaan näistä tiloista kone pysähtyy heti.

Koneen *tilanne* on nelikko

$$(q, u, a, v) \in Q \times \Gamma^* \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*,$$

missä voi olla $a = \varepsilon$, mikäli myös $u = \varepsilon$ tai $v = \varepsilon$.

Tulkinta: kone on tilassa q , nauhan sisältö sen alusta nauhapään vasemmalle puolelle on u , nauhapään kohdalla on merkki a ja nauhan sisältö nauhapään oikealta puolelta käytetyn osan loppuun on v .

Mahdollisesti on $a = \varepsilon$, jos nauhapää sijaitsee aivan nauhan alussa tai sen käytetyn osan lopussa. Ensimmäisessä tapauksessa ajatellaan, että kone "havaitsee" merkin \triangleright ja toisessa tapauksessa merkin \triangleleft .

Alkutilanne syötteellä $x = a_1 a_2 \dots a_n$ on nelikko

$$(q_0, \varepsilon, a_1, a_2 \dots a_n).$$

Tilannetta (q, u, a, v) merkitään yleensä yksinkertaisemmin $(q, u \underline{a} v)$, ja alkutilannetta syötteellä x yksinkertaisesti (q_0, \underline{x}) .



Tilanne (q, w) johtaa suoraan tilanteeseen (q', w') , merkitään

$$(q, w) \vdash_M (q', w'),$$

jos jokin seuraavista ehdoista täyttyy: kaikilla $q, q' \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$, $a, b \in \Gamma$ ja $c \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$:

jos $\delta(q, a) = (q', b, R)$, niin $(q, u\underline{a}cv) \vdash_M (q', ub\underline{c}v)$;

jos $\delta(q, a) = (q', b, L)$, niin $(q, u\underline{c}av) \vdash_M (q', u\underline{b}bv)$;

jos $\delta(q, \triangleright) = (q', \triangleright, R)$, niin $(q, \underline{\epsilon}cv) \vdash_M (q', \underline{c}v)$;

jos $\delta(q, \triangleleft) = (q', b, R)$, niin $(q, u\underline{\epsilon}) \vdash_M (q', ub\underline{\epsilon})$;

jos $\delta(q, \triangleleft) = (q', b, L)$, niin $(q, u\underline{c}\epsilon) \vdash_M (q', u\underline{c}b)$;

jos $\delta(q, \triangleleft) = (q', \triangleleft, L)$, niin $(q, u\underline{c}\epsilon) \vdash_M (q', u\underline{c})$.

Tilanteet, jotka ovat muotoa (q_{acc}, w) tai (q_{rej}, w) eivät johda mihinkään muuhun tilanteeseen. Näissä tilanteissa kone pysähtyy.



Tilanne (q, w) johtaa tilanteeseen (q', w') , merkitään

$$(q, w) \vdash_M^* (q', w'),$$

jos on olemassa tilannejono $(q_0, w_0), (q_1, w_1), \dots, (q_n, w_n)$, $n \geq 0$, siten että

$$(q, w) = (q_0, w_0) \vdash_M (q_1, w_1) \vdash_M \dots \vdash_M (q_n, w_n) = (q', w').$$

Turingin kone M hyväksyy merkkijonon $x \in \Sigma^*$, jos

$$(q_0, \underline{x}) \vdash_M^* (q_{acc}, w) \quad \text{jollakin } w \in \Gamma^*;$$

muuten M hylkää x :n.

Koneen M tunnistama kieli on:

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \vdash_M^* (q_{acc}, w) \text{ jollakin } w \in \Gamma^*\}.$$



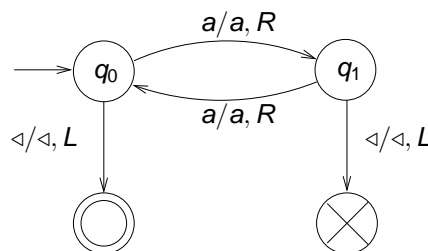
Esimerkki 1. Kieli $\{a^{2k} \mid k \geq 0\}$ voidaan tunnistaa Turingin koneella

$$M = (\{q_0, q_1, q_{acc}, q_{rej}\}, \{a\}, \{a\}, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}),$$

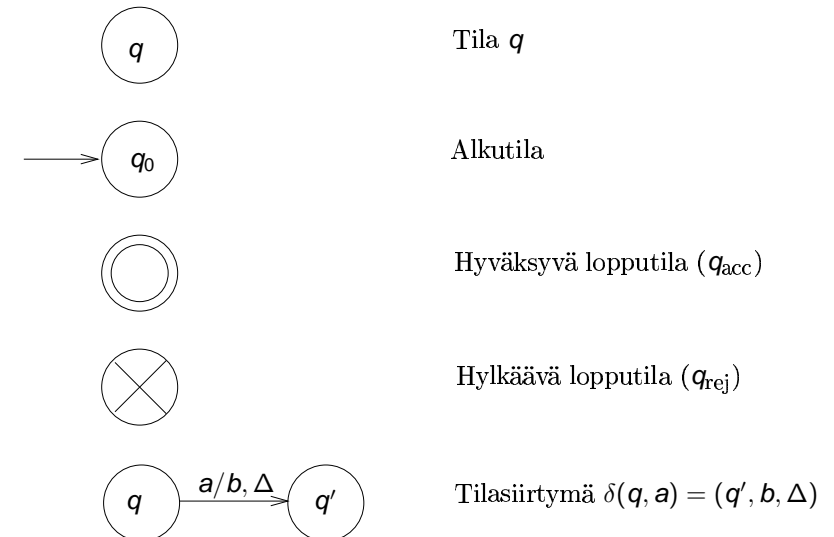
Kaavioesitys:

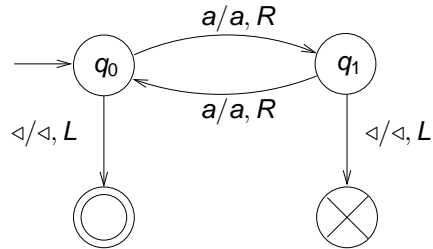
missä

- $\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$,
- $\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$,
- $\delta(q_0, \triangleleft) = (q_{acc}, \triangleleft, L)$,
- $\delta(q_1, \triangleleft) = (q_{rej}, \triangleleft, L)$.



Kaavioesityksessä käytetyt merkinnät:





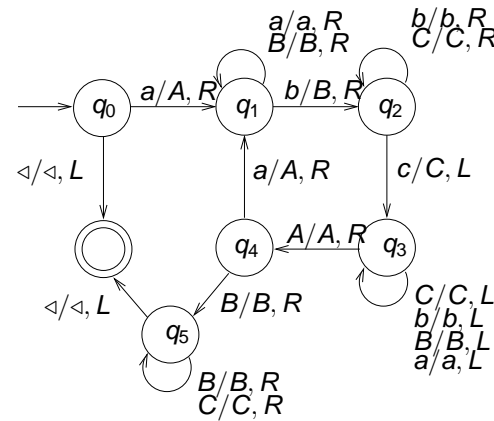
Koneen M laskenta esimerkiksi syötteellä aaa etenee seuraavasti:

$$\begin{aligned} (q_0, \underline{aaa}) \vdash_M (q_1, \underline{aaa}) \vdash_M (q_0, \underline{aaa}) \\ \vdash_M (q_1, \underline{aaa\varepsilon}) \vdash_M (q_{rej}, \underline{aaa}). \end{aligned}$$

Kone pysähtyy tilassa q_{rej} , joten $aaa \notin L(M)$.



Esimerkki 2. Kielen $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ tunnistava Turingin kone:



Selkeyden vuoksi ei koneen hylkäävää lopputilaa q_{rej} ole tässä esitetty eksplisiittisesti. Tulkinta on tällöin, että kaikki kaaviosta "puuttuvat" kaaret johtavat tähän tilaan.



Koneen laskenta syötteellä $aabbcc$:

$$\begin{aligned} (q_0, \underline{aabbcc}) \vdash (q_1, \underline{Aabbcc}) \vdash \\ (q_1, \underline{Aabbcc}) \vdash (q_2, \underline{AaBbcc}) \vdash \\ (q_2, \underline{AaBbcc}) \vdash (q_3, \underline{AaBbCc}) \vdash \\ (q_3, \underline{AaBbCc}) \vdash (q_3, \underline{AaBbCc}) \vdash \\ (q_3, \underline{AaBbCc}) \vdash (q_4, \underline{AaBbCc}) \vdash \\ (q_1, \underline{AAAbCc}) \vdash (q_1, \underline{AABbCc}) \vdash \\ (q_2, \underline{AABBcC}) \vdash (q_2, \underline{AABBcC}) \vdash \\ (q_3, \underline{AABBCC}) \vdash (q_3, \underline{AABBCC}) \vdash \\ (q_3, \underline{AABBCC}) \vdash (q_3, \underline{AABBCC}) \vdash \\ (q_4, \underline{AABBCC}) \vdash (q_5, \underline{AABBCC}) \vdash \\ (q_5, \underline{AABBCC}) \vdash (q_5, \underline{AABBCC}) \vdash \\ (q_5, \underline{AABBCC\varepsilon}) \vdash (q_{acc}, \underline{AABBCC}). \end{aligned}$$

