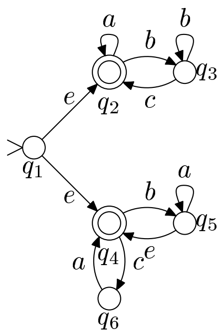
Tik-79.148 Tietojenkäsittelyteorian perusteet **Kevät 2001**
Mallitentti
Ratkaisut

I-osa

1) c
2) c
3) a
4) d
5) d

II-osa

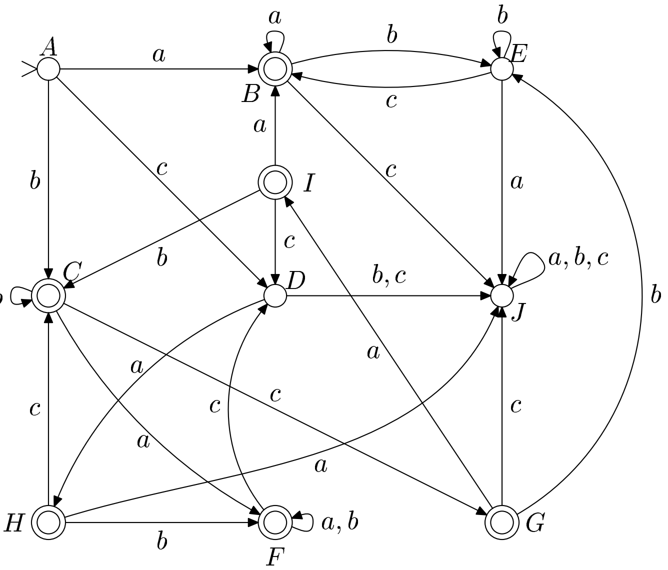
1. Säännöllistä lauseketta vastaava epädeterministinen tilakone:



Tehdään vastaavan deterministisen tilakoneen tilansiirtotaulukko:

Tila	a	b	c	Nimi
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3, q_4, q_5\}$	$\{q_6\}$	A
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	B
$\{q_3, q_4, q_5\}$	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_3, q_4, q_5\}$	$\{q_2, q_6\}$	C
$\{q_6\}$	$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	D
$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	E
$\{q_4, q_5\}$	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_6\}$	F
$\{q_2, q_6\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	G
$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_6\}$	H
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3, q_4, q_5\}$	$\{q_6\}$	I
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	J

Valmis (minimoimaton) tilakone:



Arvostelu:

- Epädeterministinen kone oikein 2p.
- Muunnos deterministiseksi 3p.

2. Halutaan osoittaa, että kieli L ei ole säännöllinen:

$$L = \{(ab)^n a^k \mid n > k, k \geq 0\} \ .$$

Vastaoletus: Kieli L on säännöllinen.

Koska L on ääretön, täytyy sen toteuttaa säännöllisten kielten pumppauslemma. Lemman mukaan on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että kaikki $w \in L$, $|w| > k$ voidaan jakaa kolmeen osaan $w = xyz$, $x, z \in \Sigma^*, y \in \Sigma^+$, jossa $xy^n z \in L$ kaikilla $y \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi osoitetaan, että on olemassa sana $w \in L$, jolle ei voida löytää ehdot toteuttavaa jakoa.

Todistuksen voi tehdä suoraan kielelle L, mutta yksinkertaisempi vaihtoehto on tarkastella kieltä:

$$L' = \{c^n a^k \mid n > k \geq 0\} \ .$$

(Kieli L' saadaan muodostettua kielestä L valitsemalla ensin aakkostoksi $\Sigma = \{ab, a\}$ ja tämän jälkeen korvaamalla symboli ab symbolilla c.)

Tarkastellaan kielen L' sanaa $c^{k+1}a^k$, missä k on pumppauslemmassa mainittu kielestä riippuva vakio.

Nyt y voidaan valita kolmella eri tapaa:

(a) $y = c^i$, $i > 0$
Tällöin $x = c^{k+1-i}$ ja $z = a^k$. Nyt $xz = c^{k+1-i}a^k$. Koska $k+1-i \leq k$, $xz \notin L$, joten valinta ei kelpaa.

(b) $y = a^j$, $j > 0$
Tällöin $x = c^{k+1}$, $z = a^{k-j}$. Nyt $xy^2z = c^{k+1}a^{k+j} \notin L$, koska $k+1 \leq k+j$. Tämäkään valinta ei siis kelpaa.

(c) $y = c^i a^j$, $i, j > 0$.
Nyt $xy^2z = c^{k+1}a^j c^i a^k \notin L$, sillä a-merkkejä esiintyy ennen viimeistä c-merkkiä.

Koska pumppauslemman ehdot täyttävää jakoa ei voitu löytää, ei L' ole säännöllinen, joten myöskään L ei sitä ole.

Arvostelu:

- Pumppauslemma ja sen käyttöperiaate 2p.
- Todistuksen yksityiskohdat 3p.

3. Kielen $L = \{a^n b^m c^k \mid k = |n-m|\}$ generoiva kielioppi on:

$$G = (V, \Sigma, R, S),$$

missä

$$\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, A, B, C, S, S'\} \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \\
R &= \{S \rightarrow S', S \rightarrow AC, S' \rightarrow aS'c, S' \rightarrow B, B \rightarrow aBb, \\
&\quad\ B \rightarrow e, A \rightarrow aAb, A \rightarrow e, C \rightarrow bCc, C \rightarrow e\}
\end{aligned}$$

Kielioppia vastaa pinoautomaatti

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F),$$

missä

$$\begin{aligned}
K &= \{s, f\} \\
\Sigma &= \{a, b, c\} \\
\Gamma &= \{a, b, c, A, B, C, S, S'\} \\
F &= \{f\} \\
\Delta &= \{((s, e, e), (f, S)), ((f, e, S), (f, S')), ((f, e, S), (f, AC)), \\
&\quad ((f, e, S'), (f, aS'c)), ((f, e, S'), (f, B)), ((f, e, B), (f, aBb)), \\
&\quad ((f, e, B), (f, e)), ((f, e, A), (f, aAb)), ((f, e, A), (f, e)), \\
&\quad ((f, e, C), (f, bCc)), ((f, e, C), (f, e)), ((f, a, a), (f, e)), \\
&\quad ((f, b, b), (f, e)), ((f, c, c), (f, e))\}
\end{aligned}$$

Arvostelu:

- Kielioppi 3p.
- Pinoautomaatti 2p.

4. a) Olkoon L_1 ja L_2 yhteydettömiä kieliä. Tällöin on olemassa yhteydettömät kieliopit $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ ja $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ siten, että $L(G_1) = L_1$ ja $L(G_2) = L_2$. Voidaan olettaa, että $(V_1 - \Sigma_1) \cap (V_2 - \Sigma_2) = \emptyset$, sillä toisen kieliopin nonterminaalit voidaan aina nimetä uudelleen.

Muodostetaan kielioppi $G = (V_1 \cup V_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$, missä

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \ .$$

Nyt $L(G) = L_1 \circ L_2$. Tämä nähdään siitä, että määritelmän mukaan

$$L_1 \circ L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\},$$

ja nonterminaalista S_1 voidaan johtaa kaikki sanat $x \in L_1$ sekä nonterminaalista S_2 kaikki sanat $y \in L_2$.

Arvostelu:

- Kieliopin G perusidea 1p.
- Yksityiskohdat 1p.

b) Universaali Turingin kone U saa syötteekseen mielivaltaisen Turingin koneen M sekä syötteen x sopivalla tapaa koodattuna. Tåmän jälkeen U simuloi koneen M toimintaa syötteellä x: $U(M, x) = M(x)$.

Kone U on kolminauhainen. Laskennan aikana ensimmäinen nauha pitää sisällään koneen M syötenauhan koodauksen, toinen nauha itse koneen M koodauksen ja kolmas nauha koneen M kulloisenkin tilan.

Jokaisella simulaatioaskeleella U etsii ensimmäiseltä nauhalta koneen M lukupään alla olevan symbolin σ ja toiselta nauhalta kolmannelle nauhalle talletettua tilaa q vastaavan siirtymän $((q, \sigma), (q', \sigma')$. Tämän jälkeen se tekee siirtymää vastaavat muutokset ensimmäiselle ja kolmannelle nauhalle. Näin jatketaan, kunnes kone M pysähtyy.

Arvostelu:

- Universaalin koneen idea (simulointi, koodaus) 1p.
- Koneen rakenne 1p.
- Simulaatioaskeleen toteutus 1p.