T-79.148 **Kevät 2005**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 2, 1.–4.2.
Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 4.2. mennessä. Ilmoittautuminen on pakollista.

Kotitehtävät:

1. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa):

   (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ sisältää parillisen määrän a:ta ja kolmella jaollisen määrän b:tä$\}$;

   (b) $\{a^{2n}b^{3m} \mid n, m \geq 0\}$;

   (c) $\{uvu^Rv^R \mid u, v \in \Sigma^*\}$;

   (d) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*$ s.e. $w = uu = vvv\}$.

2. Palautetaan mieliin luennolla esitetty merkkijonon $w \in \Sigma^*$ käänteisjonon w^R induktiivinen määritelmä:

   (i) $\varepsilon^R = \varepsilon$;

   (ii) jos $w = ua$, missä $u \in \Sigma^*$ ja $a \in \Sigma$, niin $w^R = au^R$.

   Luennolla osoitettiin, että kaikille $u, v \in \Sigma^*$ on voimassa $(uv)^R = v^Ru^R$. Osoita samaan tapaan, täsmällisesti määritelmään perustuvalla induktiolla, seuraavat tulokset:

   (a) $(w^R)^R = w$;

   (b) $(w^k)^R = (w^R)^k$, kaikilla $k \geq 0$.

3. Osoita, että kahden numeroituvan joukon A_1 ja A_2 yhdiste $A_1 \cup A_2$ on numeroituva. Päättele tästä induktiolla, että sama pätee n:n numeroituvan joukon yhdisteelle $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, kaikilla $n \geq 2$. (*Lisäkysymys:* Päteekö väite edelleen, jos yhdistettäviä joukkoja on numeroituvasti ääretön määrä, siis tapauksessa $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, missä kukin A_i on numeroituva?)

Demonstraatiotehtävät:

4. *Hilbertin hotellissa* on numeroituvasti ääretön määrä huoneita, joiden numerot ovat 0, 1, 2, 3, ... Eräänä sateisena myrsky-yönä kaikki huoneet olivat varattuja, kun ovelle kolkutti vielä yksi matkailija, jolle täytyi löytää tilaa. Miten hotellin portieeri ratkaisi ongelman?

   Hieman myöhemmin hotellin parkkipaikalle pysähtyi bussi, josta purkautui ulos numeroituvasti ääretön määrä matkustajia. Hetken mietittyään portieeri keksi keinon majoittaa vielä nämäkin matkustajat. Miten se tapahtui?

   Ehdittyään jo huokaista helpoituksesta, portieeri joutuikin vielä kiperämmän pulman eteen, kun parkkipaikalle saapui numeroituvasti ääretön määrä busseja, joissa jokaisessa oli numeroituvasti ääretön matkustajia. Saatiinko vielä heidätkin sovitettua hotelliin?

5. Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto Σ on samanveroinen binääriaakkoston $\Gamma = \{0, 1\}$ kanssa siinä mielessä, että Σ:n merkkijonot voidaan helposti koodata Γ:n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon $w \in \Sigma^*$ pituus on $|w| = n$ merkkiä, mikä on sen vastinjonon $w' \in \Gamma^*$ pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim. $\Gamma = \{1\}$?

6. Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y)-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

7. Olkoon S mielivaltainen epätyhjä joukko.

   (a) Muodosta jokin injektiivinen funktio $f : S \to \mathcal{P}(S)$.

   (b) Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injektiota $g : \mathcal{P}(S) \to S$. (*Vihje:* Oletetaan, että tällainen injektio g olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$ ja merkitään $r = g(R)$. Onko tällöin $r \in R$?)

   Totea (b)-kohdan seurauksena, että minkä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon S potenssijoukko on ylinumeroituva.