T-79.148 **Kevät 2005**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 1, 25.–28.1.
Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 4.2. mennessä. Ilmoittautuminen on kirjanpitosyistä **pakollista**, *vaikka et olisi aikonutkaan osallistua luennoille tai harjoituksiin.*

Kotitehtävät:

1. Olkoon $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$ ja $C = \{a, c, d, e\}$. Kirjoita auki (so. luettele alkioittain) seuraavat joukot:

   (a) $A \cup (C - B)$;

   (b) $B \times (A \cap C)$;

   (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \mathcal{P}(\emptyset)$.

2. (a) Olkoon perusjoukon $A = \{a, b, c, d\}$ relaatio $R \subseteq A \times A$ määritelty:

   $$R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, d)\}.$$

   Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:

   (i) R, (ii) R^{-1}, (iii) $R \circ R$, (iv) $(R \circ R) - R^{-1}$.

   Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?

   (b) Luettele kaikki joukon $\{a, b, c\}$ ekvivalenssirelaatiot (ositukset).

3. Todista induktiolla oikeaksi kaava:

   $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 (n + 1)^2}{4}$$

Demonstraatiotehtävät:

4. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

   $$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$

   Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti (“geometrisesti”) sen ekvivalenssiluokkia.

5. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

6. Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.