T-79.148 **Kevät 2005**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 2
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: *Hilbertin hotellissa* on numeroituvasti ääretön määrä huoneita, joiden numerot ovat 0, 1, 2, 3, ... Eräänä sateisena myrsky-yönä kaikki huoneet olivat varattuja, kun ovelle kolkutti vielä yksi matkailija, jolle täytyi löytää tilaa. Miten hotellin portieeri ratkaisi ongelman?

   Hieman myöhemmin hotellin parkkipaikalle pysähtyi bussi, josta purkautui ulos numeroituvasti ääretön määrä matkustajia. Hetken mietittyään portieeri keksi keinon majoittaa vielä nämäkin matkustajat. Miten se tapahtui?

   Ehdittyään jo huokaista helpoituksesta, portieeri joutuikin vielä kiperämmän pulman eteen, kun parkkipaikalle saapui numeroituvasti ääretön määrä busseja, joissa jokaisessa oli numeroituvasti ääretön matkustajia. Saatiinko vielä heidätkin sovitettua hotelliin?
   Vastaus:

   Yksi uusi asiakas: Portieeri pyysi kaikkia asiakkaita siirtymään seuraavaan huoneeseen. Ensimmäinen huone jäi tyhjäksi, joten uuden asiakkaan saa sijoitettua siihen. Samalla periaatteella saadaan hotelliin sijoitettua mikä tahansa äärellinen määrä uusia asiakkaita.

   Matemaattisesti ilmaistuna asia sujuu seuraavasti: Olkoon S hotellin alkuperäisten asiakkaiden joukko ja $f : S \to \mathbb{N}$ sen numerointi. Joukolle $S \cup \{x\}$ $(x \notin S)$ voidaan muodostaa numerointi g:

$$g(a) = \begin{cases} 0, & a = x \\ f(a) + 1, & a \neq x \end{cases} .$$

   Koska g on bijektio joukosta $S \cup \{x\}$ luonnollisille luvuille, on joukko numeroituvasti ääretön.

   Numeroituvasti ääretön määrä uusia asiakkaita: Tätä tehtävää ei voi ratkaista samaan tapaan kuin yllä, sillä hotellivieraiden siirtäminen huone kerrallaan vaatisi äärettömän monta askelta, joten huoneiden vaihtaminen ei koskaan päättyisi.

   Sitävastoin portieeri voi toimia siten, että hän pyytää kaikkia vieraita siirtymään huoneeseen, jonka numero on kaksi kertaa suurempi kuin tämänhetkisen huoneen numero. Näin saadaan kaikki nykyiset vieraat sijoitettua huoneisiin, joissa on parillinen numero ja ääretön määrä parittomia huoneita jää vapaaksi uusille vieraille.

   Matemaattisesti: Olkoon S_1 ja S_2 $(S_1 \cap S_2 = \emptyset)$ ovat numeroituvasti äärettömiä ja $f : S_1 \to \mathbb{N}$ ja $g : S_2 \to \mathbb{N}$ niiden numeroinnit. Joukko $S_1 \cup S_2$ on numeroituvasti ääretön, sillä sen numeroi funktio:

$$h(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in S_1 \\ 2g(x) + 1, & x \in S_2 \end{cases} .$$

   Numeroituvasti ääretön määrä äärettömiä joukkoja: Tällä kertaa portieeri voi sovittaa vanhat ja uudet hotellivieraat käyttäen apuna 6. demonstraatiotehtävän vastauksissa esiintyvää lomitustekniikkaa. Matemaattiset yksityiskohdat esitetään kyseisen tehtävän vastauksessa.

5. **Tehtävä:** Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto Σ on samanveroinen binääriaakkoston $\Gamma = \{0, 1\}$ kanssa siinä mielessä, että Σ:n merkkijonot voidaan helposti koodata Γ:n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon $w \in \Sigma^*$ pituus on $|w| = n$ merkkiä, mikä on sen vastinjonon $w' \in \Gamma^*$ pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim. $\Gamma = \{1\}$?

Vastaus: Olkoon Σ jokin k-merkkinen aakkosto, $k > 1$. Σ:n merkkijonot voidaan koodata $\Gamma = \{0, 1\}$:n merkkijonoiksi seuraavasti:

- Samaistetaan Σ:n aakkosto kokonaislukujen $\{1, \ldots, k\}$ kanssa.
- Nämä luvut (eli Σ:n aakkosto) voidaan esittää $\lceil \log_2 k \rceil$:n mittaisina binäärilukuina.
- Jokainen Σ:n merkkijono voidaan esittää Γ:n merkkijonona korvaamalla Σ:n aakkoset merkkijonossa niiden binäärikoodauksella.

Koodauksen purku $\Gamma^* \to \Sigma^*$ onnistuu vastaavasti ottamalla merkkijonosta $\lceil \log_2 k \rceil$:n mittaiset merkkijonot ja tulkitsemalla ne Σ:n aakkosiksi.

Jos merkkijonon $w \in \Sigma^*$ pituus on $|w| = n$ merkkiä on tällöin sen vastinjonon $w' \in \Gamma^*$ pituus $|w'| = n \cdot \lceil \log_2 k \rceil$, sillä jokaisen Σ:n merkin koodaamiseen tarvitaan $\lceil \log_2 k \rceil$ merkkiä.

Tarkastellaan esimerkiksi aakkostoa $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$ ja merkkijonoa *aacfd*. Koska $|\Sigma| = 6$, tarvitaan symbolien esittämiseen $\lceil \log_2 6 \rceil = \lceil 2.58 \rceil = 3$ bittiä. Yksi mahdollinen koodaus on:

$$\begin{array}{ll} a \mapsto 001 & d \mapsto 100 \\ b \mapsto 010 & e \mapsto 101 \\ c \mapsto 011 & f \mapsto 110 \end{array}$$

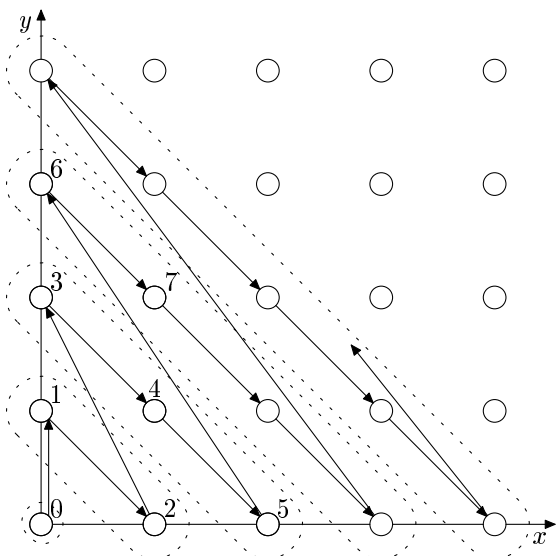
Tällöin jonon *aacfd* esitys on 001001011111100.

Vastaavaa koodausta ei voida rakentaa, mikäli $\Gamma = \{1\}$. Luvuille voidaan kyllä määrittää unaariesitys seuraavasti: $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 11$, $3 \mapsto 111$, ..., mutta näin syntynyttä koodia ei voida enää purkaa yksikäsitteisesti. Esim. lukujot 1 1 1, 1 2, 2 1 ja 3 koodautuvat kaikki merkkijonoksi 111.

6. **Tehtävä:** Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y)-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

   Vastaus: Joukko S on numeroituvasti ääretön, mikäli voidaan muodostaa bijektio $f : \mathbb{N} \to S$. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että kaikille joukon S alkioille voidaan asettaa yksikäsitteinen järjestysnumero.

   Joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alkiot $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ voidaan numeroida seuraavan kuvan mukaisesti:



Ajatuksena on siis järjestää kaikki lukuparit suoran $y = -x$ suuntaisiin jonoihin, ja numeroida nämä jonot alkioittain yksi kerrallaan lyhyimmästä alkaen. Tässä numerointia ei voida suorittaa x-akselin suuntaisesti, sillä silloin kaikki indeksit kuluisivat jo y-akselin läpikäyntiin eikä yhtään lukuparia $(x, y), y > 0$ saavutettaisi koskaan.

Ylläoleva numerointi voidaan määritellä seuraavasti:

$$f(x,y) = x + \sum_{k=1}^{x+y} k = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

Esimerkiksi $f(3,1) = 13$, eli lukuparin $(3,1)$ järjestysnumero on 13. Todettakoon vielä, että funktio $f(x,y)$ on todellakin bijektio, eli kutakin järjestysnumeroa vastaa yksikäsitteinen lukupari. Koordinaattiparin laskeminen annetusta indeksistä on kuitenkin hankalampaa, ja se jätetäänkin vastausten lopussa olevaan liitteeseen tiedoksi asiasta kiinnostuneille.

Positiiviset rationaaliluvut $\mathbb{Q}^+$ voidaan esittää $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -lukuparina s.e.

$$(x,y) \equiv \frac{x}{y}, \qquad y \neq 0$$

Tämä on numeroituvasti äärettömän joukon $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ aito osajoukko, joten $\mathbb{Q}^+$ on joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Jos $\mathbb{Q}^+$ olisi äärellinen, olisi olemassa joku rationaaliluku $\frac{x}{y}, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, jolla olisi suurin järjestysluku $n < \infty$ ($\mathbb{Q}^+$:n numeroinnissa). Kuitenkin voidaan aina löytää yo. kuvan perusteella rationaaliluku, jolla olisi järjestysluku $n' > n$, joten tämä on ristiriita oletuksen $\mathbb{Q}^+$ on äärellinen kanssa. Näin ollen $\mathbb{Q}^+$ on numeroituvasti ääretön.

Joukko $\mathbb{Q}^+$ voidaan laajentaa kaikkien rationaalilukujen joukoksi määrittelemällä joukko:

$$\mathbb{Q}^- = \{(-x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{Q}^+\} \ .$$

Koska joukko $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ on kahden numeroituvasti äärettömän joukon yhdiste, on myös se numeroituvasti ääretön.

7. **Tehtävä:** Olkoon S mielivaltainen epätyhjä joukko.

   (a) Muodosta jokin injektiivinen funktio $f : S \to \mathcal{P}(S)$.

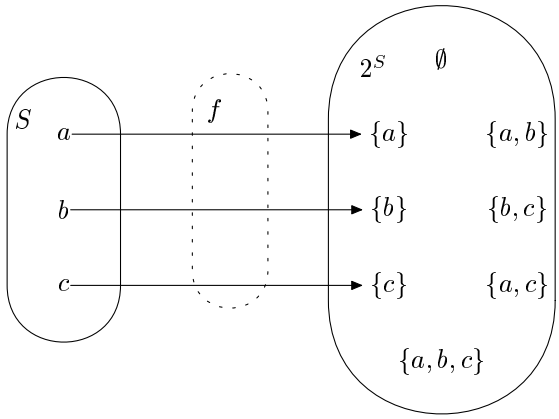
   (b) Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injektiota $g : \mathcal{P}(S) \to S$. (*Vihje:* Oletetaan, että tällainen injektio g olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$ ja merkitään $r = g(R)$. Onko tällöin $r \in R$?)

   Totea (b)-kohdan seurauksena, että minkä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon S potenssijoukko on ylinumeroituva.

   Vastaus: Oletetaan $S \neq \emptyset$ mielivaltainen.

   (a) Määritetään $f : S \to \mathcal{P}(S)$ s.e f on injektio. Kaikilla $a \in S$ on olemassa $\{a\} \in \mathcal{P}(S)$ ja jos $a \neq b$, niin $\{a\} \neq \{b\}$, joten kuvaus $f : S \to \mathcal{P}(S)$, $f(a) = \{a\}$ on halutunlainen injektio.

Alla on esitetty kuvaus f joukolle $S = \{a, b, c\}$:



(b) Oletetaan, että on olemassa injektio $g : \mathcal{P}(S) \to S$. Määritellään osajoukko $S' \subseteq S$ seuraavasti:

$$S' = \{a \in S \mid \text{ on olemassa joukko } A \subseteq S \text{ siten, että } g(A) = a\} \ .$$

Huomataan, että S' ei voi olla tyhjä joukko, sillä $|\mathcal{P}(S)| > 0$ kaikilla joukoilla S. Tarkastellaan joukkoa $R = \{s \in S' \mid s \notin g^{-1}(s)\}$ ja merkitään $r = g(R)$. Jos $r \in R$, pätee $r \notin g^{-1}(r)$. Kuitenkin

$$g^{-1}(r) = g^{-1}(g(R)) = R,$$

joten kyseessä on ristiriita. Toisaalta, jos $r \notin R$, pätee $r \in g^{-1}(r) = g^{-1}(g(R)) = R$, joka on myös ristiriita. Koska sekä $r \in R$ että $r \notin R$ johtavat ristiriitaan, täytyy jokin aikaisemmin tehdyistä oletuksista olla väärä. Ainoa tällainen oletus on se, että injektio g on olemassa, joten voimme todeta, ettei ole mahdollista muodostaa injektiota $\mathcal{P}(S) \to S$.

Yllä määriteltiin joukko S' sen takia, että muutoin merkintä $g^{-1}(s)$ ei välttämättä olisi määritelty määriteltäessä joukkoa R.

Täten ei ole mahdollista muodostaa injektiota $g : \mathcal{P}(S) \to S$. Jos S on numeroituvasti ääretön, on olemassa bijektio $f : \mathbb{N} \to S$. Jotta $\mathcal{P}(S)$ olisi numeroituva, pitäisi olla bijektio $f' : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(S)$. Oletetaan, että tällainen bijektio f' olisi olemassa. Kuvaus $g \circ f'^{-1} : \mathcal{P}(S) \to S$ on tällöin bijektio (eli injektio ja surjektio), mikä on ristiriidassa sen kanssa, että ei ole olemassa injektiota $\mathcal{P}(S) \to S$. Näin ollen $\mathcal{P}(S)$ on ylinumeroituva.

Liite: koordinaattiparin laskeminen järjestysnumerosta tehtävässä 4.

Olkoon annettuna järjestysnumero m ja halutaan laskea koordinaatit x ja y siten, että

$$x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} = m \ . \tag{1}$$

Merkitään $z = x + y$, jolloin (1) muuttuu muotoon:

$$z - y + \frac{z(z+1)}{2} = m \ . \tag{2}$$

Koska $z - y \geq 0$,

$$\frac{z(z+1)}{2} \leq m \qquad \text{, joten} \tag{3}$$

$$z \leq \frac{-1 \pm \sqrt{1+8m}}{2} \tag{4}$$

Koska $z \in \mathbb{N}$ ja $m, x, y \geq 0$, huomataan, että:

$$z = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2} \right\rfloor \tag{5}$$

Nyt voidaankin laskea sekä x että y käyttäen apuna indeksointifunktiota f:

$$\begin{aligned} x &= m - f(0, z) \\ y &= z - x \end{aligned} \tag{6}$$

Tässä $f(0, z)$ antaa (x, y):n vinorivin ensimmäisen alkion järjestysnumeron. Lasketaan esimerkiksi indeksiä $m = 13$ vastaava pari:

$$\begin{aligned} z &= \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{105}}{2} \right\rfloor = \lfloor 4.62 \rfloor = 4 \\ x &= 13 - f(0, 4) = 13 - 10 = 3 \\ y &= 4 - 3 = 1 \end{aligned}$$

Tulokseksi saatiin pari $(3, 1)$ niin kuin pitikin.