

Kotitehtävät:

1. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa).
 - (a) $\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$;
 - (b) $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ sisältää osajonoja } ba \text{ ja } ab \text{ yhteensä tasan kaksi kappaletta}\}$;
 - (c) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^* \text{ s.e. } w = uu = vvv\}$;
 - (d) $\{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$
2. Palautetaan mieleen luennolla esitetty merkkijonon $w \in \Sigma^*$ käänteisjono w^R induktiivinen määritelmä:
 - (i) $\varepsilon^R = \varepsilon$;
 - (ii) jos $w = ua$, missä $u \in \Sigma^*$ ja $a \in \Sigma$, niin $w^R = au^R$.

Luennolla osoitettiin, että kaikille $u, v \in \Sigma^*$ on voimassa $(uv)^R = v^R u^R$. Osoita samaan tapaan, täsmällisesti määritelmään perustuvalla induktiolla, seuraavat tulokset:

- (a) $(w^R)^R = w$;
 - (b) $(w^k)^R = (w^R)^k$, kaikilla $k \geq 0$.
3. Osoita, että kahden numeroituvasti äärettömän joukon A ja B yhdiste $A \cup B$ ja leikkaus $A \cap B$ ovat numeroituvia.

Demonstraatiotehtävät:

4. Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto Σ on samanveroinen binääriaakkoston $\Gamma = \{0, 1\}$ kanssa siinä mielessä, että Σ :n merkkijonot voidaan helposti koodata Γ :n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon $w \in \Sigma^*$ pituus on $|w| = n$ merkkiä, mikä on sen vastinjonon $w' \in \Gamma^*$ pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim. $\Gamma = \{1\}$?
5. Osoita, että karteeminen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y) -tasoon \mathbb{R}^2 . Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisiin vinoriveihin.) Päättelä tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko \mathbb{Q} on numeroituvasti ääretön.
6. Olkoon S mielivaltainen epätyhjä joukko.
 - (a) Muodosta jokin injektiivinen funktio $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$.
 - (b) Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injektiota $g : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$. (*Vihje:* Oletetaan, että tällainen injektio g olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$ ja merkitään $r = g(R)$. Onko tällöin $r \in R$?)

Totea (b)-kohdan seurauksena, että mikä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon S potenssijoukko on ylinumeroituva.