

Tietojenkäsittelyteorian perusteet

Harjoitus 1

Tehtävät

Kotitehtävät:

1. Olkoon $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, e\}$ ja $C = \{a, c, d\}$. Kirjoita auki (so. luettele alkioittain) seuraavat joukot:

- (a) $A \cup (C - B)$;
 (b) $B \times (A \cap C)$;
 (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \mathcal{P}(\emptyset)$.

2. Olkoon perusjoukon $A = \{a, b, c, d\}$ relaatio $R \subseteq A \times A$ määritelty:

$$R = \{(a, d), (b, b), (b, c), (c, a), (d, c)\}$$

Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:

- a) R , c) $R \circ R$,
 b) R^{-1} , d) $(R \circ R) - R$.

Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?

3. Todista induktiolla oikeaksi kaava

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Demonstraatiotehtävät:

4. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio \sim säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti (“geometrisesti”) sen ekvivalenssiluokkia.

5. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.
6. Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.