T-79.148 **Syksy 2004**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 1, 21.–22.9.
Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 1.10. mennessä. Ilmoittautuminen on kirjanpitosyistä **pakollista***, vaikka et olisi aikonutkaan osallistua luennoille tai harjoituksiin.*

Kotitehtävät:

1. Olkoon $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$ ja $C = \{a, c, d, e\}$. Kirjoita auki (so. luettele alkioittain) seuraavat joukot:
   (a) $A \cup (C - B)$;
   (b) $B \times (A \cap C)$;
   (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \mathcal{P}(\emptyset)$.

2. (a) Olkoon perusjoukon $A = \{a, b, c, d\}$ relaatio $R \subseteq A \times A$ määritelty:
$$R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, d)\}.$$
   Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:
$$\text{(i)}\ \ R, \qquad \text{(ii)}\ \ R^{-1}, \qquad \text{(iii)}\ \ R \circ R, \qquad \text{(iv)}\ \ (R \circ R) - R^{-1}.$$
   Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?
   (b) Luettele kaikki joukon $\{a, b, c\}$ ekvivalenssirelaatiot (ositukset).

3. Todista induktiolla oikeaksi kaava:
$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Demonstraatiotehtävät:

4. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:
$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$
   Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

5. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

6. Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.