

4. **Tehtävä:** Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli  $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$  kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)

**Vastaus:** Olkoon kieli  $L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ . Opetusmonisteessa (s.75) on todistettu, että tämä kieli ei ole yhteydetön. Osoitetaan, että yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen esittämällä  $L$ :n kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.

Olkoon  $L_1 = \{a^i b^k c^k \mid i, k \geq 0\}$  ja  $L_2 = \{a^k b^k c^i \mid i, k \geq 0\}$ . Nyt sekä  $L_1$  että  $L_2$  ovat yhteydettömiä, mutta  $L = L_1 \cap L_2$ , joten yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen.

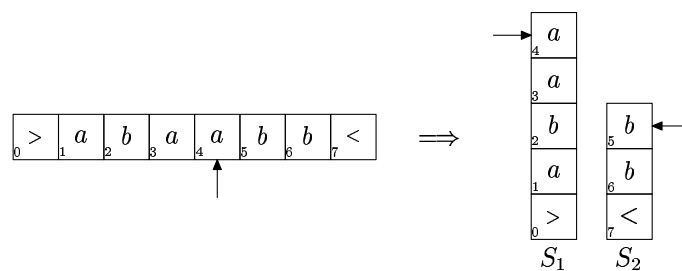
Tuloksesta seuraa suoraan se, että yhteydettömät kielet eivät voi olla suljettuja komplementin suhteen, sillä ne ovat suljettuja unionin suhteen ja DeMorganin sääntöjen perusteella  $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ .

Osoitetaan vielä lopuksi, että  $L_1$  ja  $L_2$  ovat todellakin yhteydettömiä muodostamalla niitä vastaavat kieliopit. Kielen  $L_1$  generoi yhteydetön kielioppi  $G_1 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$ , missä  $P_1 = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aA \mid \varepsilon, B \rightarrow bBc \mid \varepsilon\}$ .

Kielen  $L_2$  generoiva kielioppi  $G_2 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$ ,  $P_2 = \{S \rightarrow AB, A \rightarrow aAb \mid \varepsilon, B \rightarrow cB \mid \varepsilon\}$ .

5. **Tehtävä:** Osoita, että pinoautomaateilla, joilla on yhden sijasta kaksi pinoa, voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin Turingin koneilla.

**Vastaus:** Osoitetaan ensin, että pinoautomaatilla, jossa on kaksi pinoa, voidaan simuloida Turingin konetta. Ainut hankaluus tässä on keksiä, miten kahdella pinolla simuloidaan Turingin koneen nauhaa. Tämä onnistuu siten, että toiseen pinoon talletetaan lukupään vasemmalla puolella olevat merkit käänteisessä järjestyksessä, toiseen pinoon päin oikealla puolella olevat merkit:



Pinoautomaatin toiminta jakautuu kahteen vaiheeseen:

- Alustus, jolloin automaatti kopioi syötteen pinoon  $S_1$ , mistä se siirtää merkki kerrallaan pinoon  $S_2$  lukuunottamatta syötteen ensimmäistä merkkiä.
- Varsinainen toiminta, jolloin automaatti tekee siirtymän pinon  $S_1$  päällimmäisen merkin perusteella. Mikäli Turingin kone siirtäisi lukupäätä vasemmalle, siirretään pinon  $S_1$  päällimmäinen merkki pinoon  $S_2$  päälle. Mikäli taas lukupää siirtyisi oikealle, siirretään  $S_2$ :n päällimmäinen merkki  $S_1$ :n päälle.

Näin laadittu pinoautomaatti simuloi annettua Turingin konetta.

Seuraavaksi osoitetaan, että Turingin koneella voidaan simuloida pinoautomaattia, jossa on kaksi pinoa. Tämä onnistuu triviaalisti käyttämällä kaksinauhaista epädeterministä Turingin konetta, jossa kumpikin pinoista talletetaan omalle nauhalleen.

Formaalisti annettu muunnos Turingin koneesta kaksipinoiseksi pinoautomaatiksi voidaan määritellä seuraavasti:

Olkoon annettuna Turingin kone  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$ . Muodostetaan 2-pinoinen pinoautomaatti  $M' = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', p_0, q_{acc}, q_{rej})$ , missä:

$$Q' = Q \cup \{p_0, p_1, p_2\}$$

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{<\}$$

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{>, <\}$$

$$\delta' = \{((p_0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, >, \varepsilon)), ((p_1, <, \varepsilon, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, <))\}$$

$$\cup \{((p_1, x, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, x, \varepsilon)) \mid x \in \Sigma\}$$

$$\cup \{((p_2, \varepsilon, x, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, x)) \mid x \in \Sigma\}$$

$$\cup \{((q_1, \varepsilon, a, \varepsilon), (q_2, \varepsilon, b)) \mid (q_1, a, q_2, b, L) \in \delta\}$$

$$\cup \{((q_1, \varepsilon, a, x), (q_2, xb, \varepsilon)) \mid (q_1, a, q_2, b, R) \in \delta, x \in \Gamma'\}$$