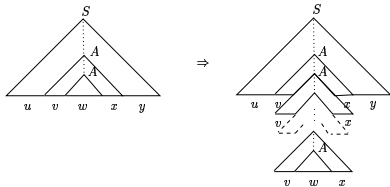


3.8 Yhteydettömien kielten rajoituksista

Yhteydettömille kielille on voimassa säännöllisten kielten pumppauslemman vastine. Nyt kuitenkin merkkijonoa on pumpattava samanlaisesta kahdesta paikasta.

Lemma 3.9 (“uvwxy-lemma”) Olkoon L yhteydetön kieli. Tällöin on olemassa sellainen $n \geq 1$, että mikä tahansa $z \in L$, $|z| \geq n$, voidaan jakaa osiin $z = uvwxy$ siten, että

- (i) $|vx| \geq 1$,
- (ii) $|vwx| \leq n$,
- (iii) $uv^iwx^i y \in L$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \dots$



Merkkijono z voidaan nyt osittaa $z = uvwxy$, missä w on A :n alimmasta ilmentymästä tuotettu osajono ja vwx seuraavaksi ylemmästä A :n ilmentymästä tuotettu osajono; osajonot saadaan johdosta

$$S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^* uvAxy \Rightarrow^* uvwxy.$$

Koska siis $S \Rightarrow^* uAy$, $A \Rightarrow^* vAx$ ja $A \Rightarrow^* w$, osajonoja v ja x voidaan “pumpata” w :n ympärillä:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow^* uAy \Rightarrow^* uvAxy \Rightarrow^* uv^2Ax^2y \Rightarrow^* \dots \\ &\Rightarrow^* uv^iAx^i y \Rightarrow^* uv^iwx^i y. \end{aligned}$$

Siten $uv^iwx^i y \in L$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \dots$

Todistus. Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ Chomskyn normaalimuotoinen kielioppi L :lle. Tällöin missä tahansa G :n jäsenyspuussa, jonka korkeus on h , on enintään 2^h lehteä. Toisin sanoen, mikä tahansa $z \in L$ jokaisessa jäsenyspuussa on polku, jonka pituus on vähintään $\log_2 |z|$.

Olkoon $k = |V - \Sigma|$ kieliopin G välikkeiden määrä. Asetetaan $n = 2^{k+1}$. Tarkastellaan jotakin $z \in L$, $|z| \geq n$, ja sen jotakin jäsenyspuuta.

Edellisen nojalla puussa on polku, jonka pituus on $\geq k + 1$; tällä polulla on siis jonkin välikkeen toistuttava — itse asiassa jo polun $k + 2$ alimman solmun joukossa. Olkoon A jokin tällainen välike.

Koska kielioppi G on Chomskyn normaalimuodossa ja $A \Rightarrow^* vAx$, on oltava $|vx| \geq 1$.

Koska edelleen välikkeen A valinnan perusteella sen toiseksi ylin ilmentymä on enintään korkeudella $k + 1$ jäsenyspuun lehdistä, on tähän ilmentymään juurtuvan alipuun tuotokselle voimassa pituusraja $|vwx| \leq 2^{k+1} = n$. \square

Esimerkki. Tarkastellaan kieltä

$$L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}.$$

Oletetaan, että L olisi yhteydetön; valitaan parametri n lemmän mukaisesti ja tarkastellaan merkkijonoa $z = a^n b^n c^n \in L$.

Lemman 3.9 mukaan z voidaan jakaa pumpattavaksi osiin

$$z = uvwxy, \quad |vx| \geq 1, \quad |vwx| \leq n.$$

Viimeisen ehdon takia merkkijono vx ei voi sisältää sekä a :ta, b :tä että c :tä. Merkkijonossa $uv^0wx^0y = uwy$ on siten ylijäämä jotakin merkkiä muihin merkkeihin nähden, eikä se voi olla kielen L määritelmässä vaadittua muotoa, vaikka lemmän mukaan pitäisi olla $uwy \in L$.

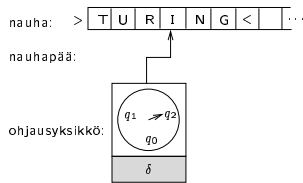
4. TURINGIN KONEET

Alan Turing 1935–36.

Churchin–Turingin teesi: Mikä tahansa mekaanisesti ratkeava ongelma voidaan ratkaista Turingin koneella.

Ekvivalentteja laskentamalleja:
 Gödelin–Kleenen rekursiivisesti määritellyt funktiot (1936),
 Churchin λ -kalkyyli (1936),
 Postin (1936) ja Markovin (1951) merkkijonomuunnossysteemit,
 kaikki nykyiset ohjelmointikielät.

Turingin koneet \equiv yksinkertainen ohjelmointikieli.



Määritelmä 4.1 Turingin kone on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej}),$$

missä:

- Q on koneen *tilojen* äärellinen joukko;
- Σ on koneen *syöteaakkosto*;
- $\Gamma \supseteq \Sigma$ on koneen *nauha-aakkosto* (ol. että $>, < \notin \Gamma$);
- $\delta : (Q - \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \rightarrow Q \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \times \{L, R\}$ on koneen *siirtymäfunktio*;
- $q_0 \in Q$ on koneen *alkutila*;
- $q_{acc} \in Q$ on koneen *hyväksyvä* ja $q_{rej} \in Q$ sen *hylkäävä lopputila*.

Siirtymäfunktion arvon

$$\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$$

tulkinta:

Ollessaan tilassa q ja lukiessaan nauhamerkin (tai alku- tai loppumerkin) a , kone siirtyy tilaan q' , kirjoittaa lukemaansa paikkaan merkin b , ja siirtää nauhapäätä yhden merkkipaikan verran suuntaan Δ ($L \sim$ "left", $R \sim$ "right").

Sallittuja kirjoitettavia merkkejä ja siirtosuuntia on rajoitettu, mikäli $a = '>'$ tai $'<'$, ja siirtymäfunktion arvo on aina määrittelemätön, kun $q = q_{acc}$ tai $q = q_{rej}$. Joutuessaan jompaan kumpaan näistä tiloista kone pysähtyy heti.

Siis: siirtymäfunktion arvoilta

$$\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$$

vaaditaan:

(i) jos $b = >$, niin $a = >$;

(ii) jos $a = >$, niin $b = >$ ja $\Delta = R$;

(iii) jos $b = <$, niin $a = <$ ja $\Delta = L$.

200

Tilanne (q, w) johtaa suoraan tilanteeseen (q', w') , merkitään

$$(q, w) \vdash_M (q', w'),$$

jos jokin seuraavista ehdoista täyttyy: kaikilla $q, q' \in Q$, $u, v \in \Gamma^*$, $a, b \in \Gamma$ ja $c \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$:

jos $\delta(q, a) = (q', b, R)$, niin $(q, uacv) \vdash_M (q', ubcv)$;

jos $\delta(q, a) = (q', b, L)$, niin $(q, uca\underline{v}) \vdash_M (q', uc\underline{bv})$;

jos $\delta(q, >) = (q', >, R)$, niin $(q, \underline{c}v) \vdash_M (q', \underline{c}v)$;

jos $\delta(q, <) = (q', b, R)$, niin $(q, u\underline{\varepsilon}) \vdash_M (q', ub\underline{\varepsilon})$;

jos $\delta(q, <) = (q', b, L)$, niin $(q, uc\underline{\varepsilon}) \vdash_M (q', uc\underline{b})$;

jos $\delta(q, <) = (q', <, L)$, niin $(q, uc\underline{\varepsilon}) \vdash_M (q', uc\underline{\varepsilon})$.

Tilanteet, jotka ovat muotoa (q_{acc}, w) tai (q_{rej}, w) eivät johda mihinkään muuhun tilanteeseen. Näissä tilanteissa kone pysähtyy.

202

Koneen *tilanne* on nelikko

$$(q, u, a, v) \in Q \times \Gamma^* \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^*,$$

missä voi olla $a = \varepsilon$, mikäli myös $u = \varepsilon$ tai $v = \varepsilon$.

Tulkinta: kone on tilassa q , nauhan sisältö sen alusta nauhapään vasemmalle puolelle on u , nauhapään kohdalla on merkki a ja nauhan sisältö nauhapään oikealta puolelta käytetyn osan loppuun on v .

Mahdollisesti on $a = \varepsilon$, jos nauhapää sijaitsee aivan nauhan alussa tai sen käytetyn osan loppussa. Ensimmäisessä tapauksessa ajatellaan, että kone "havaitsee" merkin ' $>$ ' ja toisessa tapauksessa merkin ' $<$ '.

Alkutilanne syötteellä $x = a_1a_2 \dots a_n$ on nelikko

$$(q_0, \varepsilon, a_1, a_2 \dots a_n).$$

Tilannetta (q, u, a, v) merkitään yleensä yksinkertaisemmin (q, uav) , ja alkutilannetta syötteellä x yksinkertaisesti (q_0, \underline{x}) .

201

Tilanne (q, w) johtaa tilanteeseen (q', w') , merkitään

$$(q, w) \vdash_M^* (q', w'),$$

jos on olemassa tilannejono $(q_0, w_0), (q_1, w_1), \dots, (q_n, w_n)$, $n \geq 0$, siten että

$$(q, w) = (q_0, w_0) \vdash_M (q_1, w_1) \vdash_M \dots \vdash_M (q_n, w_n) = (q', w').$$

Turingin kone M hyväksyy merkkijonon $x \in \Sigma^*$, jos

$$(q_0, \underline{x}) \vdash_M^* (q_{acc}, w) \quad \text{jollakin } w \in \Gamma^*;$$

muuten M hylkää x :n.

Koneen M tunnistama kieli on:

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \vdash_M^* (q_{acc}, w) \text{ jollakin } w \in \Gamma^*\}.$$

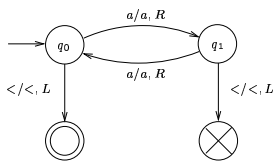
203

Esimerkki 1. Kieli $\{a^{2k} \mid k \geq 0\}$ voidaan tunnistaa Turingin koneella

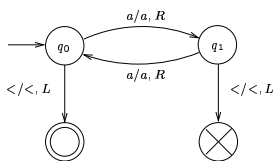
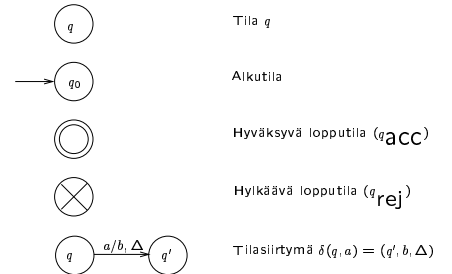
$M = (\{q_0, q_1, q_{acc}, q_{rej}\}, \{a\}, \{a\}, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej})$,
missä

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= (q_1, a, R), \\ \delta(q_1, a) &= (q_0, a, R), \\ \delta(q_0, <) &= (q_{acc}, <, L), \\ \delta(q_1, <) &= (q_{rej}, <, L). \end{aligned}$$

Kaavioesitys:



Kaavioesityksessä käytetyt merkinnät:

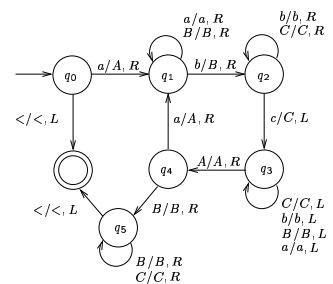


Koneen M laskenta esimerkiksi syötteellä aaa etenee seuraavasti:

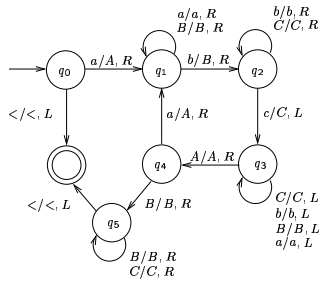
$$\begin{aligned} (q_0, \underline{aaa}) &\vdash_M (q_1, a\underline{aa}) \vdash_M (q_0, aa\underline{a}) \\ &\vdash_M (q_1, aaa\underline{}) \vdash_M (q_{rej}, aaa\underline{}). \end{aligned}$$

Kone pysähtyy tilassa q_{rej} , joten $aaa \notin L(M)$.

Esimerkki 2. Kielen $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ tunnistava Turingin kone:



Selkeyden vuoksi ei koneen hylkäävää lopputilaa q_{rej} ole tässä esitetty eksplisiittisesti. Tulokinta on tällöin, että kaikki kaaviosta "puuttuvat" kaaret johtavat tähän tilaan.



Koneen laskenta syötteellä *aabbcc*:

$(q_0, \underline{a}abbcc)$	⊢	$(q_2, AABBCc)$	⊢
$(q_1, A\underline{a}bbcc)$	⊢	$(q_2, AABBC\underline{c})$	⊢
$(q_1, Aa\underline{b}bcc)$	⊢	$(q_3, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_2, AaB\underline{b}bcc)$	⊢	$(q_3, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_2, AaBb\underline{c}cc)$	⊢	$(q_3, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_3, AaBb\underline{C}c)$	⊢	$(q_3, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_3, AaBb\underline{C}c)$	⊢	$(q_4, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_3, AaBb\underline{C}c)$	⊢	$(q_5, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_3, AaBb\underline{C}c)$	⊢	$(q_5, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_4, AaBb\underline{C}c)$	⊢	$(q_5, AABBC\underline{C})$	⊢
$(q_1, AAB\underline{b}Cc)$	⊢	$(q_5, AABBC\underline{C}\underline{\epsilon})$	⊢
$(q_1, AAB\underline{b}Cc)$	⊢	$(q_{acc}, AABBC\underline{C})$	⊢