2.4 Äärellisten automaattien minimointi

Annetun äärellisen automaatin kanssa ekvivalentin (so. saman kielen tunnistavan), mutta tilamäärältään minimaalisen automaatin muodostaminen on sekä käytännössä että teoreettiselta kannalta tärkeä tehtävä.

Tehtävä voidaan ratkaista seuraavassa esitettävällä tehokkaalla menetelmällä. Menetelmän perusideana on pyrkiä samaistamaan keskenään sellaiset syötteenä annetun automaatin tilat, joista lähtien automaatti toimii täsmälleen samoin kaikilla merkkijonoilla.

Olkoon

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

äärellinen automaatti.

Laajennetaan M:n siirtymäfunktio yksittäisistä syötemerkeistä merkkijonoihin: jos $q \in Q$, $x \in \Sigma^*$, merkitään

$$\delta^*(q, x) = \text{ se } q' \in Q, \text{ jolla } (q, x) \underset{M}{\vdash}^* (q', \varepsilon).$$

M:n tilat q ja q' ovat *ekvivalentit*, merkitään

$$q \equiv q',$$

jos kaikilla $x \in \Sigma^*$ on

$$\delta^*(q, x) \in F \quad \text{jos ja vain jos} \quad \delta^*(q', x) \in F;$$

toisin sanoen, jos automaatti q:sta ja q':sta lähtien hyväksyy täsmälleen samat merkkijonot.

Lievempi ekvivalenssiehto: tilat q ja q' ovat *k-ekvivalentit*, merkitään

$$q \overset{k}{\equiv} q',$$

jos kaikilla $x \in \Sigma^*$, $|x| \leq k$, on

$$\delta^*(q, x) \in F \quad \text{jos ja vain jos} \quad \delta^*(q', x) \in F;$$

toisin sanoen, jos mikään enintään k:n pituinen merkkijono ei pysty erottamaan tiloja toisistaan.

Ilmeisesti on:

(i) $q \overset{0}{\equiv} q'$ joss sekä q että q' ovat lopputiloja tai kumpikaan ei ole; ja

(ii) $q \equiv q'$ joss $q \overset{k}{\equiv} q'$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$ (1)

Esitettävä minimointialgoritmi perustuu syötteenä annetun automaatin tilojen k-ekvivalenssiluokkien hienontamiseen $(k+1)$-ekvivalenssiluokiksi kunnes saavutetaan täysi ekvivalenssi.

Algoritmi MIN-FA [Äärellisen automaatin minimointi]

Syöte: Äärellinen automaatti $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Tulos: M:n kanssa ekvivalentti äärellinen automaatti $\widehat{M}$, jossa on minimimäärä tiloja.

Menetelmä:

1. [Turhien tilojen poisto.] Poista M:stä kaikki tilat, joita ei voida saavuttaa tilasta q_0 millään syötemerkkijonolla.

2. [0-ekvivalenssi.] Osita M:n jäljelle jääneet tilat kahteen luokkaan: ei-lopputiloihin ja lopputiloihin.

3. [k-ekvivalenssi $\to$ $(k+1)$-ekvivalenssi.] Tarkastele M:n tilasiirtymien käyttäytymistä muodostetun osituksen suhteen: jos tilasiirtymät ovat täysin yhteensopivia osituksen kanssa, so. jos samaan luokkaan kuuluvista tiloista siirrytään samoilla merkeillä aina samanluokkaisiin tiloihin, niin algoritmi päättyy ja minimiautomaatin $\widehat{M}$ tiloiksi tulevat muodostuneet M:n tilojen *luokat*. $\widehat{M}$:n siirtymäfunktio saadaan M:n siirtymäfunktiosta, joka oletuksen mukaan on yhteensopiva syntyneen luokituksen kanssa. $\widehat{M}$:n alku- ja lopputilat määräytyvät samoin M:n alku- ja lopputilojen perusteella.

Jos taas osituksen luokat sisältävät keskenään eri lailla käyttäytyviä tiloja, hienonna ositusta edelleen jakamalla kunkin luokan sisällä erityyppiset tilat eri luokkiin. Palaa suorittamaan askel 3 uudestaan; muista erityisesti toistaa tilasiirtymätarkastelu uuden osituksen suhteen.

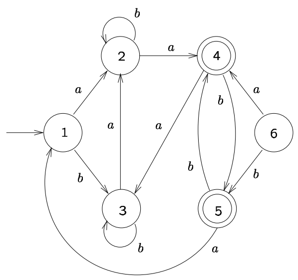
On helppo osoittaa, että askelen 3 $(k+1)$:nnen suorituskerran $(k = 0, 1, \ldots)$ alussa kaksi tilaa kuuluu samaan muodostetun osituksen luokkaan, jos ja vain jos ne ovat k-ekvivalentteja.

Tästä seuraa, että algoritmin suorituksen päättyessä, kun ositus ei enää hienone, muodostuneet tilaluokat ovat täsmälleen M:n tilojen $\equiv$-ekvivalenssiluokat (vrt. ominaisuus (1.ii)).

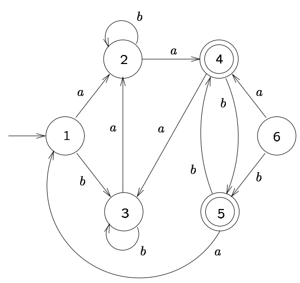
Algoritmin suoritus päättyy välttämättä aina, sillä kullakin askelen 3 suorituskerralla, viimeistä lukuunottamatta, vähintään yksi tilaluokka ositetaan pienemmäksi.

Lause 2.1 Algoritmi MIN-FA muodostaa annetun äärellisen automaatin M kanssa ekvivalentin äärellisen automaatin $\widehat{M}$, jossa on minimimäärä tiloja. Tämä automaatti on tilojen nimeämistä paitsi yksikäsitteinen. $\square$

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavan automaatin minimointia:

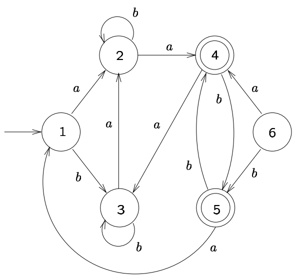


Vaiheessa 1 automaatista poistetaan tila 6, johon ei päästä millään merkkijonolla.



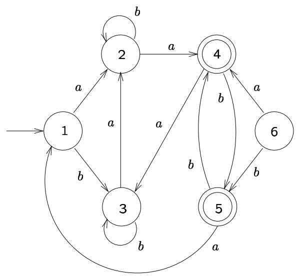
Vaiheessa 2 ositetaan automaatin tilat 1–5 eilopputiloihin (luokka I) ja lopputiloihin (luokka II), ja tarkastetaan siirtymien käyttäytyminen osituksen suhteen:

			a	b
I :	$\to$	1	2, I	3, I
		2	4, II	2, I
		3	2, I	3, I
II :	$\leftarrow$	4	3, I	5, II
	$\leftarrow$	5	1, I	4, II

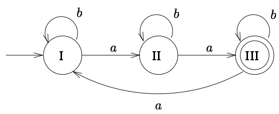


Luokassa I on nyt kahdentyyppisiä tiloja ({1,3} ja {2}), joten ositusta täytyy hienontaa ja tarkastaa siirtymät uuden osituksen suhteen:

		a	b
I :	$\rightarrow$ 1	2, II	3, I
	3	2, II	3, I
II :	2	4, III	2, II
III :	$\leftarrow$ 4	3, I	5, III
	$\leftarrow$ 5	1, I	4, III



Nyt kunkin luokan sisältämät tilat ovat keskenään samanlaisia, joten minimointialgoritmi päättyy. Saadun minimiautomaatin tilakaavio on seuraava:

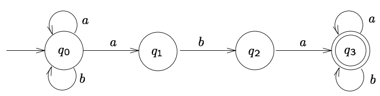


2.5 Epädeterministiset äärelliset automaatit

Epädeterministiset automaatit ovat muuten samanlaisia kuin deterministiset, mutta niiden siirtymäfunktio δ ei liitä automaatin vanhan tilan ja syötemerkin muodostamiin pareihin yksikäsitteistä uutta tilaa, vaan *joukon* mahdollisia seuraavia tiloja. Epädeterministinen automaatti hyväksyy syötteensä, jos *jokin* mahdollisten tilojen jono johtaa hyväksyvään lopputilaan.

Vaikka epädeterministisiä automaatteja ei voi sellaisinaan toteuttaa tietokoneohjelmina, ne ovat tärkeä päätösongelmien *kuvausformalismi.*

Esimerkki. Epädeterministinen automaatti, joka tutkii sisältääkö syötejono osajonoa aba:



Automaatti hyväksyy esim. syötejonon $aaba$, koska sen on mahdollista edetä seuraavasti:

$$(q_0, aaba) \vdash (q_0, aba) \vdash (q_1, ba) \vdash (q_2, a) \vdash (q_3, \varepsilon).$$

Automaatin olisi tosin mahdollista päätyä myös hylkäävään tilaan:

$$(q_0, aaba) \vdash (q_0, aba) \vdash (q_0, ba) \vdash (q_0, a) \vdash (q_0, \varepsilon),$$

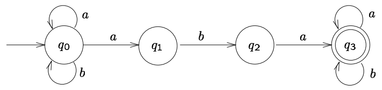
mutta tästä mahdollisuudesta ei tarvitse välittää — voidaan ajatella, että automaatti osaa "ennustaa" ja valita aina parhaan mahdollisen vaihtoehdon.

Määritelmä 2.2 Epädeterministinen äärellinen automaatti on viisikko

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

missä

- Q on äärellinen *tilojen* joukko;
- Σ on *syöteaakkosto*;
- $\delta : Q \times \Sigma \to \boxed{\mathcal{P}(Q)}$ on automaatin joukkoarvoinen *siirtymäfunktio*;
- $q_0 \in Q$ on *alkutila*;
- $F \subseteq Q$ on *(hyväksyvien) lopputilojen* joukko.



Esimerkiksi aba-automaatin siirtymäfunktio:

	a	b
$\to q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\leftarrow q_3$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

Taulukosta nähdään, että esimerkiksi $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$ ja $\delta(q_1, a) = \emptyset$.

Epädeterministisen automaatin tilanne (q, w) voi *johtaa suoraan* tilanteeseen (q', w'), merkitään

$$(q, w) \underset{M}{\vdash} (q', w'),$$

jos on $w = aw'$ $(a \in \Sigma)$ ja $q' \in \delta(q, a)$. Sanotaan myös, että tilanne (q', w') on tilanteen (q, w) mahdollinen *välitön seuraaja*.

Useamman askelen mittaiset tilannejohdot, merkkijonojen hyväksyminen ja hylkääminen ym. käsitteet määritellään samoin sanoin kuin deterministisillä automaateilla. Koska yhden askelen johdon määritelmä kuitenkin nyt on toinen, niiden sisältö muovautuu hieman erilaiseksi.

Lause 2.2 Olkoon $A = L(M)$ jonkin epädeterministisen äärellisen automaatin M tunnistama kieli. Tällöin on olemassa myös deterministinen äärellinen automaatti $\widehat{M}$, jolla $A = L(\widehat{M})$.

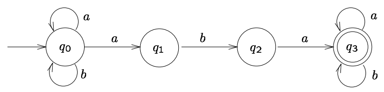
Todistus. Olkoon $A = L(M)$, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Todistuksen ideana on laatia deterministinen äärellinen automaatti $\widehat{M}$, joka simuloi M:n toimintaa kaikissa sen kullakin hetkellä mahdollisissa tiloissa *rinnakkain*.

Formaalisti: automaatin $\widehat{M}$ tilat vastaavat M:n tilojen *joukkoja*:

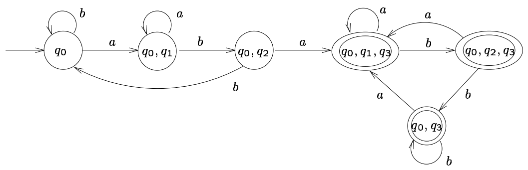
$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, \widehat{q}_0, \widehat{F}),$$

missä

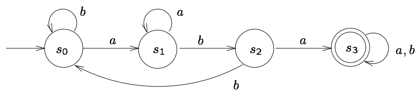
$$\begin{aligned}
\widehat{Q} &= \mathcal{P}(Q) = \{S \mid S \subseteq Q\}, \\
\widehat{q}_0 &= \{q_0\}, \\
\widehat{F} &= \{S \subseteq Q \mid S \text{ sisältää jonkin } q_f \in F\}, \\
\widehat{\delta}(S, a) &= \bigcup_{q \in S} \delta(q, a).
\end{aligned}$$



Esimerkiksi aba-automaattiin sovellettuna em. konstruktio tuottaa seuraavan deterministisen automaatin (vain alkutilasta saavutettavat tilat esitetty):



Minimoimalla ja nimeämällä tilat uudelleen tämä yksinkertaistuu muotoon:



[Todistus jatkuu.] Tarkastetaan, että automaatti $\widehat{M}$ todella on ekvivalentti M:n kanssa, so. että $L(\widehat{M}) = L(M)$.

Määritelmien mukaan on:

$x \in L(M)$ joss $(q_0, x) \underset{M}{\vdash}^* (q_f, \varepsilon)$ jollakin $q_f \in F$

ja

$x \in L(\widehat{M})$ joss $(\{q_0\}, x) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S, \varepsilon)$
ja S sis. jonkin $q_f \in F$.

Osoitetaan siis, että kaikilla $x \in \Sigma^*$ ja $q \in Q$ on:

$$(q_0, x) \underset{M}{\vdash}^* (q, \varepsilon) \text{ joss } (\{q_0\}, x) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S, \varepsilon) \text{ ja } q \in S. \tag{2}$$

Väite (2):

$(q_0, x) \underset{M}{\vdash}^* (q, \varepsilon)$ joss $(\{q_0\}, x) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S, \varepsilon)$ ja $q \in S$.

Väitteen (2) todistus tehdään induktiolla merkkijonon x pituuden suhteen.

(i) Tapaus $|x| = 0$:

$(q_0, \varepsilon) \underset{M}{\vdash}^* (q, \varepsilon)$ joss $q = q_0$;

samoin $(\{q_0\}, \varepsilon) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S, \varepsilon)$ joss $S = \{q_0\}$.

Väite (2):

$(q_0, x) \underset{M}{\vdash}^* (q, \varepsilon)$ joss $(\{q_0\}, x) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S, \varepsilon)$ ja $q \in S$.

(ii) Induktioaskel:

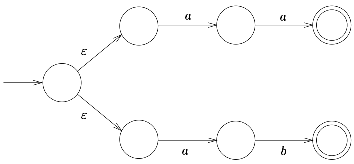
Olkoon $x = ya$; oletetaan, että väite (2) pätee y:lle. Tällöin:

$(q_0, x) = (q_0, ya) \underset{M}{\vdash}^* (q, \varepsilon)$ joss
$\exists q' \in Q$ s.e. $(q_0, ya) \underset{M}{\vdash}^* (q', a)$ ja $(q', a) \underset{M}{\vdash} (q, \varepsilon)$ joss
$\exists q' \in Q$ s.e. $(q_0, y) \underset{M}{\vdash}^* (q', \varepsilon)$ ja $(q', a) \underset{M}{\vdash} (q, \varepsilon)$ joss (in
$\exists q' \in Q$ s.e. $(\{q_0\}, y) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S', \varepsilon)$ ja $q' \in S'$ ja $q \in \delta(q', a)$
$(\{q_0\}, y) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S', \varepsilon)$ ja $\exists q' \in S'$ s.e. $q \in \delta(q', a)$ joss
$(\{q_0\}, y) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S', \varepsilon)$ ja $q \in \bigcup_{q' \in S'} \delta(q', a) = \widehat{\delta}(S', a)$ joss
$(\{q_0\}, ya) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S', a)$ ja $q \in \widehat{\delta}(S', a) = S$ joss
$(\{q_0\}, ya) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S', a)$ ja $(S', a) \underset{\widehat{M}}{\vdash} (S, \varepsilon)$ ja $q \in S$ joss
$(\{q_0\}, x) = (\{q_0\}, ya) \underset{\widehat{M}}{\vdash}^* (S, \varepsilon)$ ja $q \in S$. $\square$

ε-automaatit

Jatkossa tarvitaan vielä yksi äärellisten automaattien mallin laajennus: epädeterministinen äärellinen automaatti, jossa sallitaan *ε-siirtymät*. Tällaisella siirtymällä automaatti tekee epädeterministisen valinnan eri jatkovaihtoehtojen välillä lukematta yhtään syötemerkkiä.

Esimerkiksi kieli $\{aa, ab\}$ voitaisiin tunnistaa seuraavalla ε-automaatilla:



Formaalisti: ε-automaatti on viisikko

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

missä siirtymäfunktio δ on kuvaus

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q).$$

Muut määritelmät ovat kuten tavallisilla epädeterministisillä äärellisillä automaateilla, paitsi suoran tilannejohdon määritelmä: ε-automaattien tapauksessa relaatio

$$(q, w) \underset{M}{\vdash} (q', w')$$

on voimassa, jos on

(i) $w = aw'$ $(a \in \Sigma)$ ja $q' \in \delta(q, a)$; tai
(ii) $w = w'$ ja $q' \in \delta(q, \varepsilon)$.

Lemma 2.4 Olkoon $A = L(M)$ jollakin ε-automaatilla M. Tällöin on olemassa myös ε-siirtymätön epädeterministinen automaatti $\widehat{M}$, jolla $A = L(\widehat{M})$.

Todistus. Olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ jokin ε-automaatti. Automaatti $\widehat{M}$ toimii muuten aivan samoin kuin M, mutta se "harppaa" ε-siirtymien yli suorittamalla kustakin tilasta lähtien vain ne "aidot" siirtymät, jotka ovat siitä käsin jotakin ε-siirtymäjonoa pitkin saavutettavissa.

Formaalisti määritellään annetun tilan $q \in Q$ *ε-sulkeuma* $\varepsilon^*(q)$ automaatissa M kaavalla

$$\varepsilon^*(q) = \{q' \in Q \mid (q, \varepsilon) \underset{M}{\vdash}^* (q', \varepsilon)\},$$

so. joukkoon $\varepsilon^*(q)$ kuuluvat kaikki ne automaatin M tilat, jotka ovat saavutettavissa tilasta q pelkillä ε-siirtymillä.

Automaatin $\widehat{M}$ siirtymäsäännöt voidaan nyt kuvata seuraavasti:

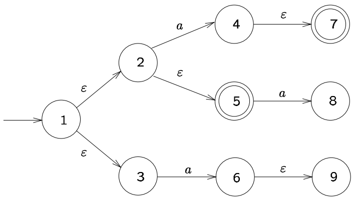
$$\widehat{M} = (Q, \Sigma, \widehat{\delta}, q_0, \widehat{F}),$$

missä

$$\widehat{\delta}(q, a) = \bigcup_{q' \in \varepsilon^*(q)} \delta(q', a);$$

$$\widehat{F} = \{q \in Q \mid \varepsilon^*(q) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Poistetaan esimerkiksi edellisen konstruktion mukaisesti ε-siirtymät ε-automaatista:



Tuloksena saadaan tavallinen epädeterministinen automaatti: