6. LASKETTAVUUSTEORIAA

Churchin–Turingin teesi: Mielivaltainen (riittävän vahva) laskulaite $\equiv$ Turingin kone.

Laskettavuusteoria: Tarkastellaan mitä Turingin koneilla voi ja erityisesti mitä *ei* voi laskea.

Tärkeä erottelu: Pysähtyvät ja ei-pysähtyvät Turingin koneet.

Määritelmä 6.1 Turingin kone

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$$

on *totaalinen*, jos se pysähtyy kaikilla syötteillä. Formaali kieli A on *rekursiivisesti numeroituva*, jos se voidaan tunnistaa jollakin Turingin koneella, ja *rekursiivinen*, jos se voidaan tunnistaa jollakin totaalisella Turingin koneella.

Vaihtoehtoinen termistö: Palautetaan mieliin päätösongelmien (binäärivasteisten I/O-kuvausten) ja formaalien kielten vastaavuus: päätösongelmaa Π vastaava formaali kieli A_Π koostuu niistä syötteistä x, joille ongelman Π vastaus on "kyllä" (so. toivottu vaste = 1).

Päätösongelma Π on *ratkeava*, jos sitä vastaava formaali kieli A_Π on rekursiivinen, ja *osittain ratkeava*, jos A_Π on rekursiivisesti numeroituva. Ongelma, joka ei ole ratkeava, on *ratkeamaton*. (*Huom.*: ratkeamaton ongelma voi siis olla osittain ratkeava.)

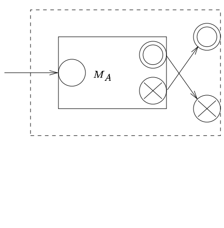
Toisin sanoen: päätösongelma on ratkeava, jos sillä on totaalinen, kaikilla syötteillä pysähtyvä ratkaisualgoritmi, ja osittain ratkeava, jos sillä on ratkaisualgoritmi joka "kyllä"-tapauksissa vastaa aina oikein, mutta "ei"-tapauksissa voi jäädä pysähtymättä.

6.2 Rekursiivisten ja rek. num. kielten perusominaisuuksia

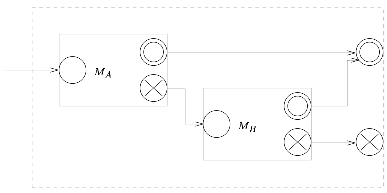
Lause 6.1 Olkoot $A, B \subseteq \Sigma^*$ rekursiivisia. Tällöin myös $\bar{A} = \Sigma^* - A$, $A \cup B$ ja $A \cap B$ ovat rekursiivisia.

Todistus.

(i) Olkoon M_A totaalinen Turingin kone, jolla $L(M_A) = A$. Kielen $\bar{A}$ tunnistava totaalinen Turingin kone saadaan vaihtamalla M_A:n hyväksyvä ja hylkäävä lopputila keskenään.



(ii) Olkoot M_A ja M_B totaaliset Turingin koneet, joilla $L(M_A) = A$, $L(M_B) = B$. Kielen $A \cup B$ tunnistava totaalinen Turingin kone M saadaan yhdistämällä M_A ja M_B toimimaan peräkkäin: jos M_A hyväksyy syötteen, myös M hyväksyy; jos M_A päätyy hylkäämiseen, M simuloi vielä M_B:tä.



(iii) $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$. $\square$

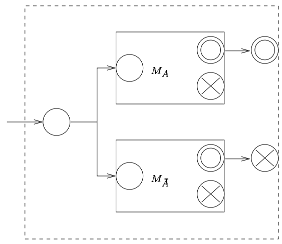
Lause 6.2 Olkoot $A, B \subseteq \Sigma^*$ rekursiivisesti numeroituvia. Tällöin myös $A \cup B$ ja $A \cap B$ ovat rekursiivisesti numeroituvia.

Todistus. $A \cap B$ kuten Lause 6.1 ja $A \cup B$ kuten Lause 6.3. (HT) □

Lause 6.3 Kieli $A \subseteq \Sigma^*$ on rekursiivinen, jos ja vain jos kielet A ja $\bar{A}$ ovat rekursiivisesti numeroituvia.

Todistus. Väite vasemmalta oikealle seuraa lauseesta 6.1(i). Todistetaan väite oikealta vasemmalle.

Olkoot M_A ja $M_{\bar{A}}$ Turingin koneet kielten A ja $\bar{A}$ tunnistamiseen. Kaikilla $x \in \Sigma^*$ *joko* M_A *tai* $M_{\bar{A}}$ *pysähtyy* ja hyväksyy x:n. Muodostetaan M_A ja $M_{\bar{A}}$ "rinnakkain" yhdistämällä totaalinen kaksinauhainen tunnistajakone M: M simuloi ykkösnauhallaan konetta M_A ja kakkosnauhallaan konetta $M_{\bar{A}}$. Jos ykkössimulaatio pysähtyy hyväksyvään lopputilaan, M hyväksyy syötteen; jos taas kakkossimulaatio hyväksyy, M hylkää syötteen. □



Seuraus 6.4 Olkoon $A \subseteq \Sigma^*$ rekursiivisesti numeroituva kieli, joka ei ole rekursiivinen. Tällöin kieli $\bar{A}$ ei ole rekursiivisesti numeroituva. □

6.3 Turingin koneiden koodaus

Tarkastellaan standardimallisia Turingin koneita, joiden syöteaakkosto on $\Sigma = \{0, 1\}$. Jokainen tällainen kone

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

voidaan esittää binäärijonona:

Oletetaan, että $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$, missä $q_{\text{acc}} = q_{n-1}$ ja $q_{\text{rej}} = q_n$; ja että $\Gamma \cup \{>, <\} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$, missä $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = >$ ja $a_3 = <$. Merkitään lisäksi $\Delta_0 = L$ ja $\Delta_1 = R$.

Siirtymäfunktion δ arvojen koodaus: säännön $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, \Delta_t)$ koodi on

$$c_{ij} = 0^{i+1}10^{j+1}10^{r+1}10^{s+1}10^{t+1}.$$

Koko koneen M koodi on

$$\begin{aligned} c_M \;=\; & 111c_{00}11c_{01}11\dots11c_{0m}11c_{10}11\dots11c_{1m}11 \\ & \dots11c_{n-2,0}11\dots11c_{n-2,m}111. \end{aligned}$$

Kääntäen voidaan jokaiseen binäärijonoon c liittää jokin Turingin kone M_c. Binäärijonoihin, jotka eivät ole edellisen koodauksen mukaisia Turingin koneiden koodeja, liitetään jokin triviaali, kaikki syötteet hylkäävä kone M_{triv}.

Määritellään siis:

$$M_c = \begin{cases} \text{kone } M, \text{ jolla } c_M = c, \text{ jos } c \text{ on kelvollinen} \\ \quad \text{konekoodi;} \\ \text{kone } M_{\text{triv}}, \text{ muuten.} \end{cases}$$

Saadaan luettelo kaikista aakkoston $\{0, 1\}$ Turingin koneista, ja epäsuorasti myös kaikista aakkoston $\{0, 1\}$ rekursiivisesti numeroituvista kielistä. Koneet ovat

$$M_\varepsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, \dots,$$

kielet vastaavasti

$$L(M_\varepsilon), L(M_0), L(M_1), L(M_{00}), L(M_{01}), \dots$$

(indeksit kanonisessa järjestyksessä). Kukin kieli voi esiintyä luettelossa monta kertaa.

Eräs ei rekursiivisesti numeroituva kieli

Lemma 6.5 Kieli

$$D = \{c \in \{0,1\}^* \mid c \notin L(M_c)\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva.

Todistus. Oletetaan, että olisi $D = L(M)$ jollakin standardimallisella Turingin koneella M. Olkoon d koneen M binäärikoodi, so. $D = L(M_d)$. Tällöin on

$$d \in D \quad \Leftrightarrow \quad d \notin L(M_d) = D.$$

Ristiriidasta seuraa, että kieli D ei voi olla rekursiivisesti numeroituva. $\square$

Kieltä D vastaava päätösongelma: "Onko niin, ettei annetun koodin c esittämä Turingin kone hyväksy syötettä c?" Luontevampia esimerkkejä seuraa jatkossa.

Kielen D muodostaminen kuvallisesti: jos kielten $L(M_\varepsilon)$, $L(M_0)$, $L(M_1)$, ... karakteristiset funktiot esitetään taulukkona, niin kieli D poikkeaa kustakin kielestä taulukon diagonaalilla:

D $\searrow$	$L(M_\varepsilon)$	$L(M_0)$	$L(M_1)$	$L(M_{00})$	$\cdots$
ε	$\overset{1}{\cancel{0}}$	0	0	0	$\cdots$
0	0	$\overset{0}{\cancel{1}}$	1	0	$\cdots$
1	0	0	$\overset{0}{\cancel{1}}$	1	$\cdots$
00	0	0	0	$\overset{1}{\cancel{0}}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

6.4 Universaalit Turingin koneet

Aakkoston $\{0,1\}$ *universaalikieli* U määritellään:

$$U = \{c_M w \mid w \in L(M)\}.$$

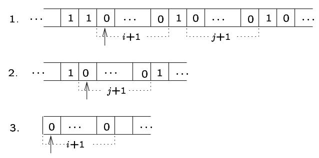
Olkoon A jokin aakkoston $\{0,1\}$ rekursiivisesti numeroituva kieli, ja olkoon M kielen A tunnistava standardimallinen Turingin kone. Tällöin on

$$A = \{w \in \{0,1\}^* \mid c_M w \in U\}.$$

Myös kieli U on rekursiivisesti numeroituva. Kielen U tunnistavia Turingin koneita sanotaan *universaaleiksi Turingin koneiksi*.

Lause 6.6 Kieli U on rekursiivisesti numeroituva.

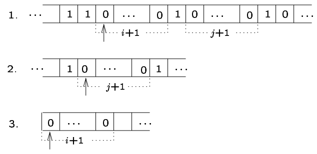
Todistus. Kielen U tunnistava universaalikone M_U on helpointa kuvata kolmenauhaisena mallina. (Standardointi tavalliseen tapaan.) Laskennan aluksi tarkastettava syöte sijoitetaan koneen M_U ykkösnauhan alkuun.



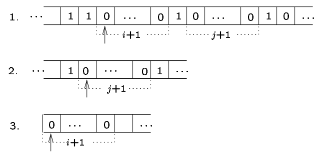
Tämän jälkeen kone toimii seuraavasti:

1. Aluksi M_U tarkastaa, että syöte on muotoa cw, missä c on kelvollinen Turingin koneen koodi. Jos syöte ei ole kelvollista muotoa, M_U hylkää sen; muuten se kopioi merkkijonon $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in \{0,1\}^*$ kakkosnauhalle muodossa

$$00010^{a_1+1}10^{a_2+1}1\ldots10^{a_k+1}10000.$$



2. Jos syöte on muotoa cw, missä $c = c_M$ jollakin koneella M, M_U:n on selvitettävä, hyväksyisikö kone M syötteen w. Tässä tarkoituksessa M_U säilyttää ykkösnauhalla M:n kuvausta c, kakkosnauhalla simuloi M:n nauhaa, ja kolmosnauhalla säilyttää tietoa M:n simuloidusta tilasta muodossa $q_i \sim 0^{i+1}$ (aluksi siis M_U kirjoittaa kolmosnauhalle tilan q_0 koodin 0).

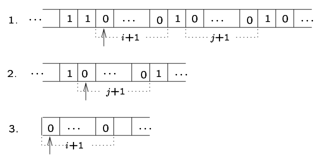


3. Alkutoimien jälkeen M_U toimii vaiheittain, simuloiden kussakin vaiheessa yhden koneen M siirtymän. Vaiheen aluksi M_U etsii ykkösnauhalta M:n kuvauksesta kohdan, joka vastaa M:n simuloitua tilaa q_i ja merkkiä a_j.

Olkoon ykkösnauhalla oleva koodinkohta

$$0^{i+1}10^{j+1}10^{r+1}10^{s+1}10^{t+1}.$$

Tällöin M_U korvaa kolmosnauhalla merkkijonon 0^{i+1} merkkijonolla 0^{r+1}, kakkosnauhalla merkkijonon 0^{j+1} merkkijonolla 0^{s+1}, ja siirtää kakkosnauhan nauhapäätä yhden simuloidun merkin vasemmalle, jos $t = 0$, ja oikealle, jos $t = 1$.

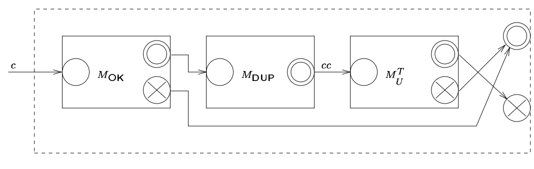


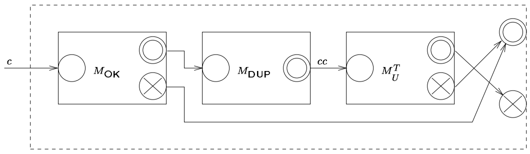
Jos ykkösnauhalla ei ole yhtään simuloituun tilaan q_i liittyvää koodia, simuloitu kone M on tullut hyväksyvään tai hylkäävään lopputilaan; tällöin $i = k + 1$ tai $i = k + 2$, missä q_k on viimeinen ykkösnauhalla kuvattu tila. Kone M_U siirtyy vastaavasti lopputilaan q_{acc} tai q_{rej}. □

Lause 6.7 Kieli U ei ole rekursiivinen.

Todistus. Oletetaan, että kielellä U olisi totaalinen tunnistajakone M_U^T. Tällöin voitaisiin Lemman 6.5 kielelle D muodostaa totaalinen tunnistajakone M_D seuraavasti.

Olkoon M_{OK} totaalinen Turingin kone, joka testaa, onko syötteenä annettu merkkijono kelvollinen Turingin koneen koodi, ja olkoon M_{DUP} totaalinen Turingin kone, joka muuntaa syötejonon c muotoon cc. Kone M_D muodostetaan koneista M_U^T, M_{OK} ja M_{DUP} yhdistämällä seuraavan kaavion esittämällä tavalla:





Selvästi kone M_D on totaalinen, jos kone M_U^T on, ja

$$\begin{aligned} c \in L(M_D) &\Leftrightarrow c \notin L(M_{\mathsf{OK}}) \text{ tai } cc \notin L(M_U^T) \\ &\Leftrightarrow c \notin L(M_c) \\ &\Leftrightarrow c \in D. \end{aligned}$$

Mutta lemman 6.5 mukaan kieli D ei ole rekursiivinen; ristiriita. $\square$.

Seuraus 6.8 Kieli

$$\tilde{U} = \{c_M w \mid w \notin L(M)\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva.

Todistus. Kieli $\tilde{U}$ on oleellisesti sama kuin universaalikielen U komplementti $\bar{U}$; tarkasti ottaen on $\bar{U} = \tilde{U} \cup \mathsf{ERR}$, missä ERR on helposti tunnistettava rekursiivinen kieli

$$\mathsf{ERR} = \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ ei sisällä alkuosanaan kelvollista Turingin koneen koodia}\}.$$

Jos siis kieli $\tilde{U}$ olisi rekursiivisesti numeroituva, olisi samoin myös kieli $\bar{U}$. Koska kieli U on rekursiivisesti numeroituva, seuraisi tästä, että U on peräti rekursiivinen. Mutta tämä on vastoin edellisen lauseen tulosta, mistä päätellään, että kieli $\tilde{U}$ ei voi olla rekursiivisesti numeroituva. $\square$