

4. **Tehtävä:** Määritellään perusjoukossa  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  relaatio  $\sim$  säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

**Vastaus:** Relaatio  $\sim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$  on määritelty seuraavasti:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + n = p + q$$

Toisin sanoen, kaksi lukuparia ovat ekvivalentit silloin, kun niiden summat ovat samat. Relaatio on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle  $\sim$ .

i) Relaatio  $\sim$  on symmetrinen, jos  $(m, n) \sim (p, q)$  aina kun  $(p, q) \sim (m, n)$ . Koska

$$m + n = p + q \Leftrightarrow p + q = m + n,$$

kuuluu  $((p, q), (m, n))$  aina relaatioon, kun  $((m, n), (p, q))$  kuuluu, joten symmetriisyys toteutuu.

ii) Relaatio  $\sim$  on refleksiivinen, jos kaikille  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  pätee  $(m, n) \sim (m, n)$ . Koska

$$m + n = m + n,$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio  $\sim$  on transitiivinen, jos aina kun  $(m, n) \sim (p, q)$  ja  $(p, q) \sim (k, l)$  myös  $(m, n) \sim (k, l)$ . Jos pätee:

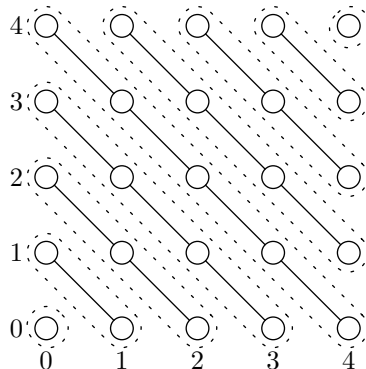
$$m + n = p + q \text{ ja } p + q = k + l,$$

niin

$$m + n = p + q = k + l \Rightarrow m + n = k + l,$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on  $\sim$  ekvivalenssirelaatio. Alla on relaation graafiesityksen alkuosa:



Kaaviosta nähdään, että relaation määräämät ekvivalenssiluokat vastaavat suoran  $y = -x$  suuntaisia suoria.

5. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jos  $X$  on äärellinen joukko, jonka koko on  $n = |X|$ , niin sen potenssijoukon koko on  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .

**Vastaus:** Perustapaus:  $X = \emptyset$ . Tällöin  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  ja  $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$ .

Induktio-oletus: oletetaan että on olemassa jokin  $k \in \mathbb{N}$  siten, että sääntö pätee kaikille  $n \leq k$ .

Induktioaskel: olkoon  $|X| = k + 1$ . Merkitään  $X = Y \cup \{x\}$  ( $x \notin Y$ ). Induktio-oletuksen perusteella  $|\mathcal{P}(Y)| = 2^k$ .  $|\mathcal{P}(X)|$ :ään kuuluvat kaikki  $|\mathcal{P}(Y)|$ :n joukot sekä  $|\mathcal{P}(Y)|$ :n joukkojen unioni joukon  $\{x\}$ :n kanssa. Saadaan  $|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ .

6. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon  $S$  osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko  $S$  on ääretön.

**Vastaus:** Sovelletaan induktiota  $S$ :n kokoon suhteen.

- 1° Perustapaus: Tarkastellaan pienintä mahdollista ei-tyhjää joukkoa  $S_1 = \{a_1\}$ . Tälle on olemassa vain yksi osittaisjärjestys  $R_1 = \{(a_1, a_1)\}$ . (Osittaisjärjestys on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiiivinen binäärirelaatio).

Joukon alkio  $a \in S$  on minimialkio täsmälleen silloin, kun se ei esiinny relaatiossa oikealla puolella (refleksiivistä kaarta lukuunottamatta), formaalimmin:

$$\forall a, b \in S : (b, a) \in R \Rightarrow a = b,$$

Osittaisjärjestyksessä  $R_1$  alkio  $a_1$  täyttää ylläolevan ehdon, joten se on minimialkio.

- 2° Induktio-oletus: Oletetaan, että on olemassa jokin luonnollinen luku  $n > 1$ , jolle pätee: kun  $|S| < n$ , kaikilla  $S$ :n alkiosta muodostetuilla osittaisjärjestyksillä on minimialkio.

- 3° Induktioaskel: Olkoon  $S_n = \{a_1, \dots, a_n\}$  joukko, jossa on  $n$  alkioita, ja olkoon  $R_n$  jokin (mikä tahansa)  $S_n$ :n alkiosta muodostettu osittaisjärjestys. Valitaan nyt mielivaltainen alkio  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), poistetaan se joukosta  $S_n$ , ja poistetaan relaatiosta kaikki siihen viittaavat parit:

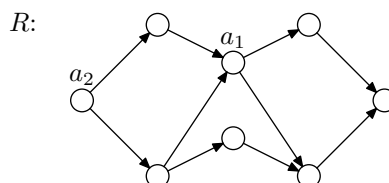
$$\begin{aligned} S'_n &= S_n - \{a_i\} \\ R'_n &= \{(a, b) \in R_n \mid a \neq a_i \wedge b \neq a_i\} \end{aligned}$$

Nyt  $R'_n$  on myös osittaisjärjestys (todista tämä, seuraa pohjimmiltaan  $R_n$ :n transitiiivisuudesta). Koska joukossa  $S'_n$  on  $n - 1$  alkioita ( $< n$ ),  $R'_n$ :ssa on induktio-oletuksen perusteella ainakin yksi minimialkio, jota merkitään  $a_{\min}$ .

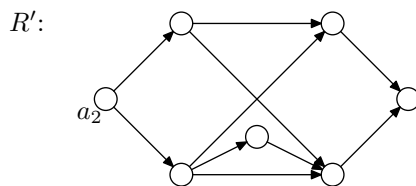
Palataan tarkastelemaan relaatiota  $R_n$ . Nyt on olemassa kaksi mahdollista tapausta:

- i) Mikäli kaari  $(a_i, a_{\min}) \notin R_n$ , on  $a_{\min}$  myös osittaisjärjestyksen  $R_n$  minimialkio, koska  $R_n$ :n ja  $R'_n$ :n ainoana erona on alkio  $a_i$  ja siihen liittyvät kaaret.
- ii) Mikäli kaari  $(a_i, a_{\min}) \in R_n$ , ei  $a_{\min}$  voi olla minimialkio. Koska  $a_{\min}$  on kuitenkin osittaisjärjestyksen  $R'_n$  minimialkio ja koska osittaisjärjestys on aina transitiiivinen, relaatiossa  $R_n$  ei voi olla kaarta  $(b, a_i) \in R_n, b \neq a_i$ . Muussa tapauksessa myös kaari  $(b, a_{\min}) \in R'_n$ , eikä  $a_{\min}$  olisi  $R'_n$ :n minimialkio. Näin ollen alkio  $a_i$  on  $R_n$ :n minimialkio, ja induktiotodistus saatiin valmiiksi.

Todistuksen induktioaskelta voidaan havainnollistaa tarkastelemalla seuraavaa osittaisjärjestystä (kaaviosta on jätetty selkeyden vuoksi pois refleksiiviset ja transitiiiviset kaaret):



Poistetaan alkio  $a_1$ . Tällöin jäljelle jää osittaisjärjestys  $R'$ :



Tämän osittaisjärjestyksen minimialkio on  $a_2$ . Koska alkuperäisessä järjestyksessä ei ole kaarta  $(a_1, a_2)$ , huomataan, että  $a_2$  on myös  $R$ :n minimi. Tämä vastaa induktioaskeleen tapausta (i). Tapaus (ii) puolestaan vastaa tilannetta, jossa poistetaan  $a_2$ .

Äärettömän perusjoukon yli määritellyillä osittaisjärjestyksillä ei välttämättä ole minimialkioita. Yksi esimerkki on kokonaisluvut  $\mathbb{Z}$  ja osittaisjärjestys  $\leq$ .

Yksinkertainen esimerkki osittaisjärjestyksestä, jolla on monta minimiä on:

$$R = \{(p, p), (q, q), (l, l), (q, l), (p, l)\}.$$

Relaatiossa sekä  $p$  että  $q$  ovat minimialkioita.

