3.3 KIELIOPPIEN JÄSENNYSONGELMA

Ratkaistava tehtävä:

"Annettu yhteydetön kielioppi G ja merkkijono x. Onko $x \in L(G)$?"

Ratkaisumenetelmä = *jäsennysalgoritmi*.

Useita vaihtoehtoisia menetelmiä, erityisesti kun G on jotain rajoitettua (käytännössä esiintyvää) muotoa.

Johdot ja jäsennyspuut

Olkoon $\gamma \in V^*$ kieliopin $G = (V, \Sigma, P, S)$ lausejohdos.

Lähtösymbolista S merkkijonoon γ johtavaa suorien johtojen jonoa

$$S = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = \gamma$$

sanotaan γ:n *johdoksi* G:ssä.

Johdon *pituus* on siihen kuuluvien suorien johtojen määrä (edellä n).

Esimerkki: lauseen $a+a$ johtoja kieliopissa G_{expr}:

$$\begin{array}{rlllllll}
\text{(i)} & E & \Rightarrow & E+T & \Rightarrow & T+T & \Rightarrow & F+T \\
& & \Rightarrow & a+T & \Rightarrow & a+F & \Rightarrow & a+a \\
\text{(ii)} & E & \Rightarrow & E+T & \Rightarrow & E+F & \Rightarrow & T+F \\
& & \Rightarrow & F+F & \Rightarrow & F+a & \Rightarrow & a+a \\
\text{(iii)} & E & \Rightarrow & E+T & \Rightarrow & E+F & \Rightarrow & E+a \\
& & \Rightarrow & T+a & \Rightarrow & F+a & \Rightarrow & a+a.
\end{array}$$

Johto $\gamma \Rightarrow^* \gamma'$ on *vasen johto*, merkitään

$$\gamma \underset{\mathsf{lm}}{\Rightarrow}^* \gamma',$$

jos kussakin johtoaskelessa on produktiota sovellettu merkkijonon vasemmanpuoleisimpaan välikkeeseen (edellä johto (i)).

Vastaavasti määritellään *oikea johto* (edellä (iii)), jota merkitään

$$\gamma \underset{\mathsf{rm}}{\Rightarrow}^* \gamma'$$

Suoria vasempia ja oikeita johtoaskelia merkitään $\gamma \underset{\mathsf{lm}}{\Rightarrow} \gamma'$ ja $\gamma \underset{\mathsf{rm}}{\Rightarrow} \gamma'$.

Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ yhteydetön kielioppi.

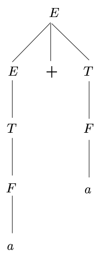
Kieliopin G mukainen *jäsennyspuu* on järjestetty puu, jolla on seuraavat ominaisuudet:

(i) puun solmut on nimetty joukon $V \cup \{\varepsilon\}$ alkioilla siten, että sisäsolmujen nimet ovat välikkeitä (so. joukosta $N = V - \Sigma$) ja juurisolmun nimenä on lähtösymboli S;

(ii) jos A on puun jonkin sisäsolmun nimi, ja $X_1, \ldots, X_k$ ovat sen jälkeläisten nimet järjestyksessä, niin
$A \to X_1 \ldots X_k$ on G:n produktio.

Jäsennyspuun τ *tuotos* on merkkijono, joka saadaan liittämällä yhteen sen lehtisolmujen nimet esijärjestyksessä ("vasemmalta oikealle").

Esimerkki. Lauseen $a + a$ jäsennyspuu kieliopissa G_{expr}:



Lauseen johto:

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E + T \Rightarrow T + T \Rightarrow F + T \\ &\Rightarrow a + T \Rightarrow a + F \Rightarrow a + a \end{aligned}$$

Johtoa

$$S = \gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n = \gamma$$

vastaavan jäsennyspuun muodostaminen:

(i) puun juuren nimeksi tulee S; jos $n = 0$, niin puussa ei ole muita solmuja; muuten

(ii) jos ensimmäisessä johtoaskelessa on sovellettu produktiota $S \to X_1 X_2 \ldots X_k$, niin juurelle tulee k jälkeläissolmua, joiden nimet vasemmalta oikealle ovat
$X_1, X_2, \ldots, X_k$;

(iii) jos seuraavassa askelessa on sovellettu produktiota $X_i \to Y_1 Y_2 \ldots Y_l$, niin juuren i:nnelle jälkeläissolmulle tulee l jälkeläistä, joiden nimet vasemmalta oikealle ovat $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l$; ja niin edelleen.

Konstruktiosta huomataan, että jos τ on jotakin johtoa $S \Rightarrow^* \gamma$ vastaava jäsennyspuu, niin τ:n tuotos on γ.

Olkoon τ kieliopin G mukainen jäsennyspuu, jonka tuotos on päätemerkkijono x.

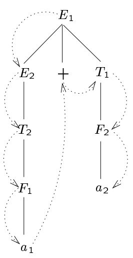
Tällöin τ:sta saadaan vasen johto x:lle käymällä puun solmut läpi esijärjestyksessä ("ylhäältä alas, vasemmalta oikealle") ja laventamalla vastaan tulevat välikkeet järjestyksessä puun osoittamalla tavalla.

Oikea johto saadaan käymällä puu läpi käänteisessä esijärjestyksessä ("ylhäältä alas, oikealta vasemmalle").

Muodostamalla annetusta vasemmasta johdosta $S \underset{\text{lm}}{\Rightarrow}^* x$ ensin jäsennyspuu edellä esitetyllä tavalla, ja sitten jäsennyspuusta vasen johto, saadaan takaisin alkuperäinen johto; vastaava tulos pätee myös oikeille johdoille.

Esimerkki. Lauseen $a + a$ vasemman johdon muodostaminen jäsennyspuusta.

Jäsennyspuu:



Solmut esijärjestyksessä:

$E_1 E_2 T_2 F_1 a_1 + T_1 F_2 a_2$

Vasen johto:

$$\begin{aligned} E &\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} E + T \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} T + T \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} F + T \\ &\underset{\text{lm}}{\Rightarrow} a + T \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} a + F \underset{\text{lm}}{\Rightarrow} a + a \end{aligned}$$

Lause 3.3 Olkoon $G = (V, \Sigma, P, S)$ yhteydetön kielioppi. Tällöin:

(i) jokaisella G:n lausejohdoksella γ on G:n mukainen jäsennyspuu τ, jonka tuotos on γ;

(ii) jokaista G:n mukaista jäsennyspuuta τ, jonka tuotos on päätemerkkijono x, vastaavat yksikäsitteiset vasen ja oikea johto $S \underset{\text{lm}}{\Rightarrow}^* x$ ja $S \underset{\text{rm}}{\Rightarrow}^* x$.

Seuraus 3.4 Jokaisella G:n lauseella on vasen ja oikea johto.

Siis: yhteydettömän kieliopin tuottamien lauseiden jäsennyspuut, vasemmat ja oikeat johdot vastaavat yksikäsitteisesti toisiaan.

Jäsennysongelman ratkaisuun katsotaan usein kuuluvan pelkän päätösongelman "Onko $x \in L(G)$?" ratkaisemisen lisäksi jonkin näistä jäsennysesityksistä tuottaminen.

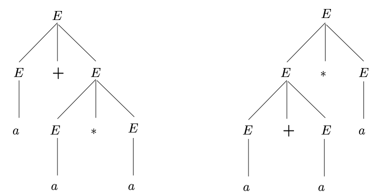
Kieliopin moniselitteisyys

Lauseella voi olla kieliopissa useita jäsennyksiä.

Esimerkki. Tarkastellaan yksinkertaisten aritmeettisten lausekkeiden kielioppia:

$$G'_{\text{expr}} = \{E \to E + E,\ E \to E * E,\ E \to a,\ E \to (E)\}.$$

Lauseella $a + a * a$ on tässä kieliopissa kaksi jäsennystä:



Yhteydetön kielioppi G on *moniselitteinen*, jos jollakin G:n lauseella x on kaksi erilaista G:n mukaista jäsennyspuuta. Muuten kielioppi on *yksiselitteinen*.

Moniselitteisyys on tietojenkäsittelysovelluksissa yleensä ei-toivottu ominaisuus, koska se merkitsee että annetulla lauseella on kaksi vaihtoehtoista "tulkintaa."

Yhteydetön kieli, jonka tuottavat kieliopit ovat kaikki moniselitteisiä, on *luonnostaan moniselitteinen*.

Esimerkiksi kielioppi G'_{expr} on moniselitteinen, kieliopit G_{expr} ja G_{match} yksiselitteisiä. Kieli $L_{\text{expr}} = L(G'_{\text{expr}})$ ei ole luonnostaan moniselitteinen, koska sillä on myös yksiselitteinen kielioppi G_{expr}. Luonnostaan moniselitteinen on esimerkiksi kieli

$$\{a^i b^j c^k \mid i = j \text{ tai } j = k\}.$$

(Todistus sivuutetaan.)

3.4 Rekursiivisesti etenevä jäsentäminen

Tarkastellaan seuraavaa kielioppia G:

$$\begin{array}{lcl} E & \to & T + E \mid T - E \mid T \\ T & \to & a \mid (E). \end{array}$$

Muokataan G:stä välikkeen E produktiot "tekijöimällä" ekvivalentti kielioppi G':

$$\begin{array}{lcl} E & \to & TE' \\ E' & \to & +E \mid -E \mid \varepsilon \\ T & \to & a \mid (E). \end{array}$$

Kieliopin G' lauseille on helppoa muodostaa vasemmat johdot suoraan lähtösymbolista E alkaen, sillä jäsennyksen joka vaiheessa määrää tavoitteena olevan lauseen *seuraava merkki* yksikäsitteisesti sen, mikä lavennettavana olevaan välikkeeseen liittyvä produktio on valittava. Kielioppia, jolla on tämä ominaisuus, sanotaan *LL(1)-tyyppiseksi*.

LL(1)-tyyppiselle kieliopille on helppo kirjoittaa jäsennysohjelma suoraan rekursiivisina proseduureina. Esimerkiksi kieliopin G' pohjalta voidaan muodostaa seuraava C-kielinen funktiokokoelma, joka syötejonon jäsennyksen yhteydessä tulostaa sen tuottavan vasemman johdon produktiot järjestyksessä.

```
#include <stdio.h>

int next;
void E(void); void Eprime(void); void T(void);

void ERROR(char *msg)
{
  printf("%s\n",msg); exit(1);
}
```



```
void E(void)
{
  printf("E  -> TE'\n");
  T(); Eprime();
}

void Eprime(void)
{
  if (next == '+') {
    printf("E' -> +E\n");
    next = getchar();
    E();
  }
  else if (next == '-') {
    printf("E' -> -E\n");
    next = getchar();
    E();
  }
  else
    printf("E' -> \n");
}
```



```
void T(void)
{
  if (next == 'a') {
    printf("T  -> a\n");
    next = getchar();
  }
  else if (next == '(') {
    printf("T  -> (E)\n");
    next = getchar();
    E();
    if (next != ')')
      ERROR(") expected.");
    next = getchar();
  }
  else ERROR("T cannot start with this.");
}

int main(void)
{
  next = getchar();
  E();
  exit(0);
}
```


Esimerkiksi syötejonoa `a-(a+a)` käsitellessään ohjelma tulostaa seuraavat rivit:

```
E → TE'
T → a
E' → -E
E → TE'
T → (E)
E → TE'
T → a
E' → +E
E → TE'
T → a
E' →
E' →
```

Tulostus vastaa vasenta johtoa:

$$
\begin{aligned}
E &\Rightarrow TE' \Rightarrow aE' \Rightarrow a-E \Rightarrow a-TE' \\
&\Rightarrow a-(E)E' \Rightarrow a-(TE')E' \\
&\Rightarrow a-(aE')E' \Rightarrow a-(a+E)E' \\
&\Rightarrow a-(a+TE')E' \Rightarrow a-(a+aE')E' \\
&\Rightarrow a-(a+a)E' \Rightarrow a-(a+a).
\end{aligned}
$$