T-79.148 **Kevät 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 2, 5.-7.2.
Tehtävät

Kotitehtävät:

1. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin.
   (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ sisältää osajonon aba, mutta ei osajonoa $bab\}$;
   (b) $\{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$;
   (c) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*$ s.e. $w = uvuv\}$;
   (d) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^*$ s.e. $ww = uuu\}$.

2. Palautetaan mieliin luennolla esitetty merkkijonon $w \in \Sigma^*$ käänteisjonon w^R induktiivinen määritelmä:
   (i) $\varepsilon^R = \varepsilon$;
   (ii) jos $w = ua$, missä $u \in \Sigma^*$ ja $a \in \Sigma$, niin $w^R = au^R$.

   Luennolla osoitettiin, että kaikille $u, v \in \Sigma^*$ on voimassa $(uv)^R = v^R u^R$. Osoita samaan tapaan, täsmällisesti määritelmään perustuvalla induktiolla, seuraavat tulokset:
   (a) $(w^R)^R = w$;
   (b) $(w^k)^R = (w^R)^k$, kaikilla $k \geq 0$.

3. Olkoon A numeroituvasti ääretön joukko ja $B \subseteq A$. Osoita, että B on joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön.

Demonstraatiotehtävät:

4. Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto Σ on samanveroinen binääriaakkoston $\Gamma = \{0, 1\}$ kanssa siinä mielessä, että Σ:n merkkijonot voidaan helposti koodata Γ:n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon $w \in \Sigma^*$ pituus on $|w| = n$ merkkiä, mikä on sen vastinjonon $w' \in \Gamma^*$ pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim. $\Gamma = \{1\}$?

5. Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y)-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen ja tehtävän 3 perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

6. Olkoon S mielivaltainen epätyhjä joukko.
   (a) Muodosta jokin injektiivinen funktio $f : S \to \mathcal{P}(S)$.
   (b) Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injektiota $g : \mathcal{P}(S) \to S$. (*Vihje:* Oletetaan, että tällainen injektio g olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$ ja merkitään $r = g(R)$. Onko tällöin $r \in R$?)

   Totea (b)-kohdan seurauksena, että minkä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon S potenssijoukko on ylinumeroituva.