T-79.148 **Kevät 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 8
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Yhteydettömän kieliopin $G = (V, \Sigma, P, S)$ välike $A \in V - \Sigma$ on *turha*, jos se ei voi esiintyä minkään G:n tuottaman kielen lauseen johdossa, so. jos yksikään G:n johto ei ole muotoa $S \Rightarrow^* \alpha A \beta \Rightarrow^* x$, missä $\alpha, \beta \in V^*$, $x \in \Sigma^*$. Laadi algoritmi, joka poistaa annetusta kieliopista turhat välikkeet. (*Vihje:* Määritä ensin tarpeelliset välikkeet.)

   Vastaus: Halutaan poistaa kieliopista $G = (V, \Sigma, P, S)$ tarpeettomat välikkeet.

   Kootaan ensin joukoksi T ne välikkeet, jotka voivat jossain johdossa esiintyä. Tämä tehdään seuraavasti:

   (i) Asetetaan aluksi:
   $$T := \{S\}.$$

   (ii) Toistetaan sitten seuraavaa laajennusta kunnes joukko T ei muutu:
   $$T := T \cup \{B \in V - \Sigma \mid A \to \alpha B \beta \text{ on } G\text{: n produktio}, \alpha, \beta \in V^*, A \in T\}.$$

   Koska $|V - T|$ pienenee jokaisella askeleella, joudutaan kohtaa (ii) toistamaan korkeintaan $|V - \Sigma| + 1$ askelta, joten algoritmi lopulta pysähtyy.

   Lopuksi poistetaan kieliopista ne välikkeet, jotka eivät esiinny joukossa T (sekä niihin liittyvät produktiot). Formaalisti tämä voidaan esittää seuraavalla tavalla:

   $$\begin{aligned} G' &= (V', \Sigma, P', S) \\ V' &= V - T \\ P' &= \{A \to \alpha \mid A \in T \wedge (A \to \alpha) \in P\} \end{aligned}$$

   Tarkastellaan esimerkiksi kielioppia:

   $$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, P, S) \\ V &= \{S, A, B, C, a, b\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ P &= \{S \to aA \mid SS; \quad A \to bB \mid S \\ &\qquad B \to bS; \quad C \to aS\} \end{aligned}$$

   Alustetaan aluksi $T_0 = \{S\}$. Nyt:

   $$\begin{aligned} T_1 &= T_0 \cup \{A, S\} = \{A, S\} \\ T_2 &= T_1 \cup \{A, S, B\} = \{A, S, B\} \\ T_3 &= T_2 \cup \{A, S, B\} = \{A, S, B\} \ . \end{aligned}$$

   Ainoaksi tarpeettomaksi välikkeeksi jää C.

5. **Tehtävä**: Muodosta kielioppia $G = (V, \Sigma, P, S)$ vastaava pinoautomaatti, kun

   $$\begin{aligned} V &= \{S, (,), ^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\ \Sigma &= \{(,), ^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\ P &= \{S \to (SS), S \to S^*, S \to (S \cup S), \\ &\qquad S \to \emptyset, S \to a, S \to b\} \end{aligned}$$

Vastaus: Mitä tahansa yhteydetöntä kielioppia $G = (V, \Sigma, R, S)$ vastaava epädeterministinen pinoautomaatti $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ voidaan laatia seuraavasti:

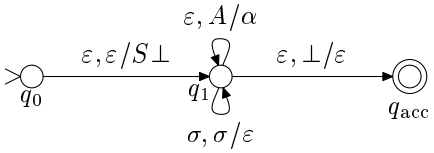
$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_{\text{acc}}\} \\
\Gamma &= V \cup \{\bot\} \\
F &= \{q_{\text{acc}}\} \\
\delta &= \{\big((q_0, \varepsilon, \varepsilon), (q_1, S\bot)\big), \big((q_1, \bot, \varepsilon), (q_{\text{acc}}, \varepsilon)\big)\} && (1) \\
&\quad \cup \{\big((q_1, \varepsilon, A), (q_1, \alpha)\big) \mid (A \to \alpha) \in P\} && (2) \\
&\quad \cup \{\big((q_1, \sigma, \sigma), (q_1, e)\big) \mid \sigma \in \Sigma\} && (3)
\end{aligned}
$$

Tässä symbolia $\bot$ käytetään pinon pohjan merkkinä.

Tehtävän kieliopille konstruktio tuottaa seuraavan pinoautomaatin:

$$
\begin{aligned}
Q =& \{q_0, q_1, q_{\text{acc}}\} \\
\Sigma =& \{(,), ^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\
\Gamma =& \{S, (,), ^*, \cup, \emptyset, a, b, \bot\} \\
F =& \{q_{\text{acc}}\} \\
\delta =& \{\big((q_0, e, e), (q_1, S\bot)\big), \big((q_1, \bot, e), (q_{\text{acc}}, e)\big), \big((q_1, e, S), (q_1, (SS))\big), \\
& \big((q_1, e, S), (q_1, S^*)\big), \big((q_1, e, S), (q_1, (S \cup S))\big), \big((q_1, e, S), (q_1, \emptyset)\big), \\
& \big((q_1, e, S), (q_1, a)\big), \big((q_1, e, S), (q_1, b)\big), \\
& \big((q_1, (, ()), (q_1, e)\big), \big((q_1,),)), (q_1, e)\big), \big((q_1, ^*, ^*), (q_1, e)\big), \\
& \big((q_1, \cup, \cup), (q_1, e)\big), \big((q_1, \emptyset, \emptyset), (q_1, e)\big), \big((q_1, a, a), (q_1, e)\big), \\
& \big((q_1, b, b), (q_1, e)\big)\}
\end{aligned}
$$

Syntynyt automaatti on muotoa:



Tarkastellaan, miten automaatti käsittelee syötteen $(a \cup b^*)$:

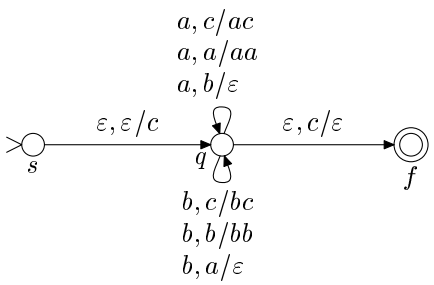
Tila	Syöte	Pino	
q_0	$(a \cup b^*)$	ε	
q_1	$(a \cup b^*)$	$S\bot$	(1)
q_1	$(a \cup b^*)$	$(S \cup S)\bot$	(2) $(S \to (S \cup S))$
q_1	$a \cup b^*)$	$S \cup S)\bot$	(3)
q_1	$a \cup b^*)$	$a \cup S)\bot$	(2) $(S \to a)$
q_1	$\cup b^*)$	$\cup S)\bot$	(3)
q_1	$b^*)$	$S^*)\bot$	(2) $(S \to S^*)$
q_1	$b^*)$	$b^*)\bot$	(2) $(S \to b)$
q_1	$^*)$	$^*)\bot$	(3)
q_1	$)$	$)\bot$	(3)
q_1	ε	$\bot$	(3)
q_{acc}	ε	ε	(1)

Huom. kieli $L(G)$ määrittelee kaikki syntaktisesti oikeanmuotoiset aakkoston $\Sigma = \{a, b\}$ yli muodostetut säännölliset lausekkeet.

6. **Tehtävä**: Muodosta pinoautomaattia M vastaava kielioppi, missä $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

$$
\begin{aligned}
Q =& \{s, q, f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b, c\} \\
F =& \{f\} \\
\delta =& \big\{\big((s, e, e), (q, c)\big), \big((q, a, c), (q, ac)\big), \big((q, a, a), (q, aa)\big) \\
& \big((q, a, b), (q, e)\big), \big((q, b, c), (q, bc)\big), \big((q, b, b), (q, bb)\big) \\
& \big((q, b, a), (q, e)\big), \big((q, e, c), (f, e)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Tilakaaviona M näyttää seuraavalta:



Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Tässä käytetään algoritmia, jotka toimii vain *yksinkertaisille* pinoautomaateille. Pinoautomaatti on yksinkertainen, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

- Jos $\big((q, u, \beta), (p, \gamma)\big)$ on pinoautomaatin siirtymä, niin $|\beta| \leq 1$.
- Jos $\big((q, u, e), (p, \gamma)\big) \in \delta$, niin myös $\big((q, u, A), (p, \gamma A)\big) \in \delta$ kaikille $A \in \Gamma$.

Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat sivuutetaan tässä).

Kieliopin muodostamisen ajatuksena on ottaa kielen välikkeiksi kolmikkoja $\langle q, A, p\rangle$, missä $q, p \in Q$ ja $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$. Ajatuksena on, että $\langle q, A, p\rangle$ generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta q tilaan p poistaen samalla pinosta symbolin A.

Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

1. Kaikille $f \in F$ asetetaan sääntö $S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle$.
2. Kaikille siirtymille $\big((q, u, A), (r, B_1 \cdots B_n)\big) \in \delta$, missä $q, r \in Q, u \in \Sigma^*, n > 0$, $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ ja $B_1 \cdots B_n \in \Gamma$, lisätään sääntö
$$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, B_1, q_1\rangle\langle q_1, B_2, q_2\rangle \cdots \langle q_{n-1}, B_n, p\rangle$$
kaikille $p, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q$.
3. Kaikille siirtymille $\big((q, u, A), (r, \varepsilon)\big) \in \delta$, missä $q, r \in Q, u \in \Sigma^*$ ja $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$, lisätään sääntö
$$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, \varepsilon, p\rangle$$
4. Kaikille $q \in Q$ lisätään sääntö $\langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon$.

Säännöistä ensimmäinen ilmaisee, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2 olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta q tilaan p ja samalla poistetaan A pinosta.

Säännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3 olevat säännöt ovat analogisia muotoa 2 olevien sääntöjen kanssa.

Kielioppi $G = (V, \Sigma, P, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p\rangle \mid q, p \in Q, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \to \langle s, e, f\rangle, && (1.)\\
& \langle s, \varepsilon, s\rangle \to \varepsilon, \langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon, \langle f, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon, && (4.)\\
& \langle s, \varepsilon, s\rangle \to \varepsilon\langle q, c, s\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon\langle q, c, q\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon\langle q, c, f\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle q, c, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, c, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, a, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', a, s\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', a, q\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, a, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', a, f\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, b, s\rangle \to a\langle q, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, b, q\rangle \to a\langle q, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, b, f\rangle \to a\langle q, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, c, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, c, q\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', b, s\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', b, q\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', b, f\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, a, s\rangle \to b\langle q, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, a, q\rangle \to b\langle q, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, a, f\rangle \to b\langle q, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, c, s\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q, c, q\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q, c, f\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.8)
\end{aligned}
$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä $S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle$, ja katsomalla, mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää.

Tuloksena syntyvät säännöt ovat

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to \langle s, \varepsilon, f\rangle \\
\langle s, \varepsilon, f\rangle &\to \langle q, c, f\rangle \\
\langle q, c, f\rangle &\to a\langle q, a, q\rangle\langle q, c, f\rangle \\
\langle q, c, f\rangle &\to b\langle q, b, q\rangle\langle q, c, f\rangle \\
\langle q, c, f\rangle &\to \langle f, \varepsilon, f\rangle \\
\langle q, a, q\rangle &\to a\langle q, a, q\rangle\langle q, a, q\rangle \\
\langle q, a, q\rangle &\to b\langle q, \varepsilon, q\rangle \\
\langle q, b, q\rangle &\to b\langle q, b, q\rangle\langle q, b, q\rangle \\
\langle q, b, q\rangle &\to a\langle q, \varepsilon, q\rangle \\
\langle q, \varepsilon, q\rangle &\to \varepsilon \\
\langle f, \varepsilon, f\rangle &\to \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään $\langle q, c, f\rangle = S$, $\langle q, b, q\rangle = B$, $\langle q, a, q\rangle = A$, ja tulokseksi saadaan

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\
A &\to aAA \mid b, \\
B &\to bBB \mid a\}
\end{aligned}
$$

Liite: Chomskyn normaalimuoto ja CYK-algoritmi

Muutetaan vielä viimeisen tehtävän kielioppi Chomskyn normaalimuotoon ja tarkistetaan CYK-algoritmilla kuuluvatko sanat *abb* ja *abba* kieleen $L(G)$.

Kielioppi on Chomskyn normaalimuodossa, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Ainoastaan alkuvälike S voi olla tyhjentyvä.
2. Mahdollisesti esiintyvää sääntöä $S \to \varepsilon$ lukuunottamatta kaikki säännöt ovat muotoa $A \to BC$ tai $A \to a$, missä A, B ja C ovat välikkeitä ja a terminaalisymboli.

Kielioppi muutetaan normaalimuotoon vaiheittain:

1. **Poistetaan lähtösymboli sääntöjen oikealta puolelta**.
   Koska kieliopissa on säännöt $S \to aAS$ ja $S \to bBS$, lisätään uusi lähtösymboli S' ja sääntö $S' \to S$. Saadaan tulokseksi sääntöjoukko:

$$
\begin{aligned}
S' &\to S, \\
S &\to aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\
A &\to aAA \mid b, \\
B &\to bBB \mid a
\end{aligned}
$$

2. **Poistetaan ε-produktiot**.
   Koska Chomskyn normaalimuodossa ainoastaan lähtösymboli S' saa olla tyhjentyvä, täytyy muut ε-säännöt poistaa kieliopista. Lasketaan aluksi tyhjentyvien välikkeiden joukko NULL:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{NULL}_0 &= \{S\} && (S \to \varepsilon) \\
\mathrm{NULL}_1 &= \{S, S'\} && (S' \to S) \\
\mathrm{NULL}_2 &= \{S, S'\} = \mathrm{NULL}
\end{aligned}
$$

Tämän jälkeen korvataan säännöt $A \to X_1 \cdots X_n$ joukolla sääntöjä

$$A \to \alpha_1 \cdots \alpha_2, \qquad \text{missä } \alpha_i = \begin{cases} X_i, X_i \notin \text{NULL} \\ X_i \text{ tai } \varepsilon, X_i \in \text{NULL} \end{cases}$$

Lopuksi poistetaan kaikki säännöt muotoa $A \to \varepsilon$ (lukuunottamatta sääntöä $S' \to \varepsilon$). Saadaan tulokseksi sääntöjoukko[1]:

$$\begin{aligned} S' &\to S \mid \varepsilon \\ S &\to aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\to aAA \mid b, \\ B &\to bBB \mid a \end{aligned}$$

3. **Poistetaan yksikköproduktiot**.
   Seuraavaksi poistetaan kieliopista kaikki muotoa $A \to B$ olevat säännöt, missä sekä A että B ovat välikkeitä.
   Lasketaan ensin joukot $F(A)$ kaikilla $A \in V - \Sigma$:

$$\begin{aligned} F(A) = F(B) = F(S) &= \emptyset \\ F(S') &= \{S\} \end{aligned}$$

   Välike B kuuluu joukkoon $F(A)$ täsmälleen silloin, kun A:sta voidaan johtaa B käyttäen pelkkiä yksikköproduktioita.
   Sääntö $A \to B$ korvataan sääntöjoukolla $\{A \to w \mid \exists C \in F(B) \cup \{B\} : C \to w \in P\}$. Tulokseksi saadaan sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\to aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \mid \varepsilon \\ S &\to aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\to aAA \mid b, \\ B &\to bBB \mid a \end{aligned}$$

4. **Poistetaan liian pitkät produktiot**.
   Viimeisessä vaiheessa lisätään kielioppiin uusi välike C_σ sekä sääntö $C_\sigma \to \sigma$ kaikille $\sigma \in \Sigma$ sekä jaetaan kaikki säännöt $A \to w$ ($|w| > 2$) ketjuksi sääntöjä, jotka kaikki johtavat tismalleen kaksi symbolia.
   Annetun kieliopin Chomskyn normaalimuodoksi saadaankin seuraava sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\to C_a S_1' \mid C_a A \mid C_b S_2' \mid C_b B \mid \varepsilon \\ S_1' &\to AS \\ S_2' &\to BS \\ S &\to C_a S_1 \mid C_a A \mid C_b S_2 \mid C_b B \\ S_1 &\to AS \\ S_2 &\to BS \\ A &\to C_a A_1 \mid b \\ A_1 &\to AA \\ B &\to C_a B_1 \mid a \\ B_1 &\to BB \\ C_a &\to a \\ C_b &\to b \end{aligned}$$

[1] Tarkkaan ottaen tässä vaiheessa pitäisi lisätä vielä uusi aloitusvälike S'' ja säännöt $S'' \to \varepsilon | S'$, mutta tässä tapauksessa ei synny ongelmia, vaikka käytetään S':a lähtösymbolina.

CYK-algoritmilla voidaan tutkia kuuluuko sana $x = x_1 \cdots x_n$ kieliopin G määrittelemään kieleen. Algoritmin kuluessa lasketaan välikejoukot $N_{i,j}$. Joukko $N_{i,j}$ käsittää kaikki ne välikkeet, joilla voidaan johtaa alimerkkijono $x_i \cdots x_j$. Joukkojen laskemisessa voidaan käyttää apuna dynaamista ohjelmointia seuraavaan tapaan:

$$\begin{aligned} N_{i,i} &= \{A \mid (A \to x_i) \in P\} \\ N_{i,i+k} &= \{A \mid \exists B, C \in V - \Sigma \text{ s.e. } (A \to BC) \in P \text{ ja} \\ &\qquad \exists j : i \leq j < i + k \text{ s. e } B \in N_{i,j} \wedge C \in N_{j+1,i+k}\} \end{aligned}$$

Tarkastellaan yllä saatua kielioppia ja sanaa *abba*. Lasketaan ensin joukot $N_{i,i}$, $i \leq 4$:

		$i \to$			
	$N_{i,i+k}$	$1 : a$	$2 : b$	$3 : b$	$4 : a$
$k \downarrow$	0	$\underline{a}bba$ $\{B, C_a\}$	$a\underline{b}ba$ $\{A, C_b\}$	$ab\underline{b}a$ $\{B, C_a\}$	$abb\underline{a}$ $\{A, C_b\}$

Kussakin taulukon ruudussa on merkittynä, mitä sanan osajonoa ruutu vastaa.

Lasketaan seuraavaksi $N_{1,2}$. Nyt ainoa mahdollinen $j = 1$, joten tarkastellaan joukkoja $N_{1,1} = \{B, C_a\}$ ja $N_{2,2} = \{A, C_b\}$. Ainoat muotoa $A \to BC$, $B \in N_{1,1}$ ja $C \in N_{2,2}$, olevat säännöt ovat: $\{S' \to C_a A, S \to C_a A\}$, joten $N_{1,2} = \{S', S\}$. Samaan saadaan laskettua joukoiksi $N_{2,3} = \{A_1\}$ ja $N_{3,4} = \{S', S\}$, joten taulukon toiseksi riviksi muodostuu:

		$i \to$			
	$N_{i,i+k}$	$1 : a$	$2 : b$	$3 : b$	$4 : a$
$k \downarrow$	0	$\underline{a}bba$ $\{B, C_a\}$	$a\underline{b}ba$ $\{A, C_b\}$	$ab\underline{b}a$ $\{B, C_a\}$	$abb\underline{a}$ $\{A, C_b\}$
	1	$\underline{ab}ba$ $\{S', S\}$	$a\underline{bb}a$ $\{A_1\}$	$ab\underline{ba}$ $\{S', S\}$	

Ruudun $N_{1,3}$ kohdalla täytyy tarkastella kahta eri vaihtoehtoa,

$$\begin{aligned} j = 1 \quad &\Rightarrow \quad N_{1,1} = \{C_a, B\} \\ &\qquad\;\; N_{2,3} = \{A_1\} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} j = 2 \quad &\Rightarrow \quad N_{1,2} = \{S', S\} \\ &\qquad\;\; N_{3,3} = \{C_b, A\} \end{aligned}$$

Tapausta $j = 1$ vastaava välikejoukko on $\{A\}$ $(A \to C_a A_1)$ ja tapausta $j = 2$ vastaava on $\emptyset$, joten $N_{1,3} = \{A\}$. Samaan tapaan jatkamalla saadaan lopulta koko taulukoksi:

		$i \to$			
	$N_{i,i+k}$	$1 : a$	$2 : b$	$3 : b$	$4 : a$
	0	$\underline{a}bba$ $\{B, C_a\}$	$a\underline{b}ba$ $\{A, C_b\}$	$ab\underline{b}a$ $\{B, C_a\}$	$abb\underline{a}$ $\{A, C_b\}$
	1	$\underline{ab}ba$ $\{S', S\}$	$a\underline{bb}a$ $\{A_1\}$	$ab\underline{ba}$ $\{S', S\}$	
$k \downarrow$	2	$\underline{abb}a$ $\{A\}$	$a\underline{bba}$ $\{S'_1, S_1\}$		
	3	$\underline{abba}$ $\{S', S, A_1\}$			

Koska $S' \in N_{1,4}$, niin $abba \in L(G)$. Sitävastoin $S' \notin N_{1,3}$, joten $abb \notin L(G)$.