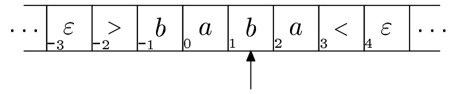
T-79.148 **Kevät 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 10
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Määrittele Turingin koneen standardimallin muunnelma, jossa koneen työnauha on molempiin suuntiin ääretön, ja osoita että tällaisilla koneilla voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin standardimallisillakin.

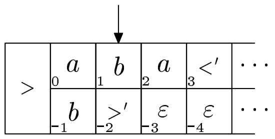
   Vastaus:

   Turingin kone, jonka nauha on kahteen suuntaan ääretön, toimii muuten samoin kuin tavallinen, mutta nyt nauhan alkumerkki ei ole kiinteä, ja kone voi siirtä sitä samaan tapaan kuin loppumerkkiäkin. Nauhan paikat indeksoidaan kokonaisluvuilla $\mathbb{Z}$, ja luku 0 osoittaa alkumerkin paikkaa laskennan alussa.

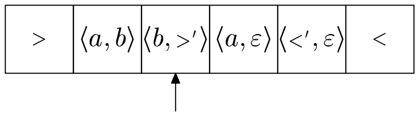
   Tällaista Turingin konetta voidaan simuloida kaksiuraisella koneella. Koneen nauha ajatellaan jaetuksi kahteen osaan, ylä- ja alapuoleen. Yläosaa käytetään nauhan paikkojen $i \geq 0$ tallettamiseen, alaosaa paikoille $i < 0$. Esimerkiksi nauhan sisältö:



   esitetään 2-uraisella koneella seuraavasti:



   Käytännössä nauhan jakaminen uriin tapahtuu korvaamalla aakkosto Σ uudella aakkostolla $\Sigma' = (\Sigma \cup \{<', >'\}) \times (\Sigma \cup \{<', >'\})$. Kukin Σ':n merkki vastaa näin kahta alkuperäisen aakkoston merkkiä. Merkit $\{<', >'\}$ ovat uusia symboleja, joilla osoitetaan nauhanpuoliskojen alku- ja loppukohdat. Ylläoleva esimerkki muodostuukin seuraavanlaiseksi:

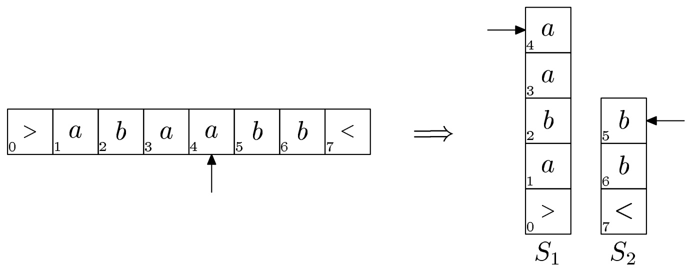


   Vielä tarvitaan tapa osoittaa kumpaa nauhan puoliskoa käsitellään. Helpoiten tämä onnistuu määrittelemällä kaikille koneen tiloille q peilikuvatila q'. Kun kone on tilassa q, se tekee siirtonsa ainoastaan ylemmän uran merkkien perusteella (lukupää on nollan oikealla puolella), ja tilassa q' siirrytään alemman uran mukaisesti (lukupää nollan vasemmalla puolella). Koska alempi ura on käänteisessä järjestyksessä, täytyy sitä käsitellessä kääntää lukupään siirto-operaatiot myös peilikuviksi. Aina kun kone lukee nauhan aidon alkumerkin $>$, se vaihtaa käsiteltävää uraa.

   Konstruktion formaali esitys jätetään liitteeseen.

5. **Tehtävä**: Osoita, että pinoautomaateilla, joilla on yhden sijasta kaksi pinoa, voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin Turingin koneilla.

   Vastaus: Osoitetaan ensin, että pinoautomaatilla, jossa on kaksi pinoa, voidaan simuloida Turingin konetta. Ainut hankaluus tässä on keksiä, miten kahdella pinolla simuloidaan Turingin koneen nauhaa. Tämä onnistuu samalla periaatteella kuin edellisessä tehtävässä simuloitiin kahteen suuntaan ääretöntä nauhaa: toiseen pinoon talletetaan lukupään vasemmalla puolella olevat merkit käänteisessä järjestyksessä, toiseen pinoon pään oikealla puolella olevat merkit:



Pinoautomaatin toiminta jakautuu kahteen vaiheeseen:

(a) Alustus, jolloin automaatti kopioi syötteen pinoon S_1, mistä se siirtään merkki kerrallaan pinoon S_2 lukuunottamatta syötteen ensimmäistä merkkiä.

(b) Varsinainen toiminta, jolloin automaatti tekee siirtymän pinon S_1 päällimmäisen merkin perusteella. Mikäli Turingin kone siirtäisi lukupäätä vasemmalle, siirretään pinon S_1 päällimmäinen merkki pinon S_2 päälle. Mikäli taas lukupää siirtyisi oikealle, siirretään S_2:n päällimmäinen merkki S_1:n päälle.

Näin laadittu pinoautomaatti simuloi annettua Turingin konetta. Tälläkin kertaa konstruktion formaali esitys jätetään liitteeseen.

Seuraavaksi osoitetaan, että Turingin koneella voidaan simuloida pinoautomaattia, jossa on kaksi pinoa. Tämä onnistuu triviaalisti käyttämällä kaksinauhaista epädeterminististä Turingin konetta, jossa kumpikin pinoista talletetaan omalle nauhalleen.

Liite. 4. tehtävän konstruktio formaalisti

Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ Turingin kone, jolla on kahteen suuntaan ääretön nauha. Muodostetaan standardimallinen Turingin kone M' seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
M' &= (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) \\
Q' &= Q \cup \{q' \mid q \in Q\} \\
\Sigma' &= (\Sigma \cup \{<', >'\}) \times (\Sigma \cup \{<', >'\}) \\
\Gamma' &= (\Gamma \cup \{<', >'\}) \times (\Gamma \cup \{<', >'\})
\end{aligned}
$$

Tilansiirtofunktio δ' muodostetaan seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\delta' = {} & \{(q_1, \langle a, \gamma \rangle, q_2, \langle b, \gamma \rangle, \Delta) \mid (q_1, a, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma'\} \\
& \cup \{(q_1, \langle \sigma', \gamma \rangle, q_2, \langle b, \gamma \rangle, \Delta) \mid (q_1, \sigma, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma', \sigma \in \{<, >\}\} \\
& \cup \{(q_1', \langle \gamma, a \rangle, q_2', \langle \gamma, b \rangle, \overline{\Delta}) \mid (q_1, a, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma'\} \\
& \cup \{(q', \langle \gamma, a \rangle, q_{\text{end}}, \langle \gamma, b \rangle, \overline{\Delta}) \mid (q, a, q_{\text{end}}, b, \Delta) \in \delta, q_{\text{end}} \in \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}, \gamma \in \Gamma'\} \\
& \cup \{(q_1', \langle \gamma, \overline{\sigma}' \rangle, q_2', \langle \gamma, b \rangle, \overline{\Delta}) \mid (q_1, \sigma, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma', \sigma \in \{<, >\}\} \\
& \cup \{(q, >, q', >, R), (q', >, q, >, R) \mid q \in Q\},
\end{aligned}
$$

missä $\overline{L} = R$, $\overline{R} = L$, $\overline{<} = >$ ja $\overline{>} = <$.

Liite. 5. tehtävän konstruktio formaalisti

Olkoon annettuna Turingin kone $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}}\}$. Muodostetaan 2-pinoinen pinoautomaatti $M' = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', p_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$ seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
Q' =& Q \cup \{p_0, p_1, p_2\} \\
\Sigma' =& \Sigma \cup \{<\} \\
\Gamma' =& \Gamma \cup \{>, <\} \\
\delta' =& \{((p_0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, >, \varepsilon)), ((p_1, <, \varepsilon, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, <))\} \\
& \cup \{((p_1, x, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, x, \varepsilon)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((p_2, \varepsilon, x, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, x)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, \varepsilon), (q_2, \varepsilon, b)) \mid (q_1, a, q_2, b, L) \in \delta\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, x), (q_2, xb, \varepsilon)) \mid (q_1, a, q_2, b, R) \in \delta, x \in \Gamma'\}
\end{aligned}
$$