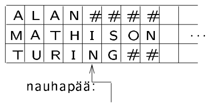
4.2 Turingin koneiden laajennuksia

1. Moniuraiset koneet

Sallitaan, että Turingin koneen nauha koostuu k:sta rinnakkaisesta urasta, jotka kaikki kone lukee ja kirjoittaa yhdessä laskenta-askelessa:



Koneen siirtymäfunktion arvot ovat tällöin muotoa:

$$\delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (q', (b_1, \ldots, b_k), \Delta),$$

missä $a_1, \ldots, a_k$ ovat urilta $1, \ldots, k$ luetut merkit, $b_1, \ldots, b_k$ niiden tilalle kirjoitettavat merkit, ja $\Delta \in \{L, R\}$ on nauhapään siirtosuunta.

Laskennan aluksi tutkittava syöte sijoitetaan ykkösuran vasempaan laitaan; muille urille tulee sen kohdalle erityisiä tyhjämerkkejä $\#$.

Formaalisti *k-urainen Turingin kone* on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}),$$

missä muut komponentit ovat kuten standardimallissa, paitsi siirtymäfunktio:

$$\delta : (Q - \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times (\Gamma^k \cup \{>, <\}) \to Q \times (\Gamma^k \cup \{>, <\}) \times \{L, R\}.$$

Seuraajatilannerelaation $\underset{M}{\vdash}$, alkutilan jne. määritelmät ovat pieniä muutoksia lukuunottamatta samanlaiset kuin standardimallissa.

Lause 4.1. Jos formaali kieli L voidaan tunnistaa k-uraisella Turingin koneella, se voidaan tunnistaa myös standardimallisella Turingin koneella.

Todistus. Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ k-urainen Turingin kone, joka tunnistaa kielen L. Vastaava standardimallinen kone $\widehat{M}$ muodostetaan seuraavasti:

$$\widehat{M} = (\widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\Gamma}, \widehat{\delta}, \widehat{q}_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}),$$

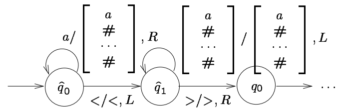
missä $\widehat{Q} = Q \cup \{\widehat{q}_0, \widehat{q}_1, \widehat{q}_2\}$, $\widehat{\Gamma} = \Sigma \cup \Gamma^k$ ja kaikilla $q \in Q$ on

$$\widehat{\delta}(q, \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}) = (q', \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \Delta),$$
$$\text{kun} \quad \delta(q, (a_1, \ldots, a_k)) = (q', (b_1, \ldots, b_k), \Delta).$$

Koneen $\widehat{M}$ laskennan aluksi täytyy syötejono "nostaa" ykkösuralle, so. korvata nauhalla merkkijono $a_1 a_2 \ldots a_n$ merkkijonolla

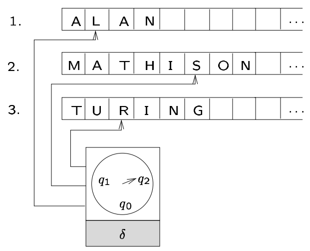
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \# \\ \vdots \\ \# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ \# \\ \vdots \\ \# \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ \# \\ \vdots \\ \# \end{bmatrix}.$$

Tätä operaatiota varten liitetään M:stä kopioidun siirtymäfunktion osan alkuun vielä pieni "esiprosessori":



$\square$

2. Moninauhaiset koneet



Sallitaan, että Turingin koneella on k toisistaan riippumatonta nauhaa, joilla on kullakin oma nauhapäänsä. Kone lukee ja kirjoittaa kaikki nauhat yhdessä laskenta-askelessa. Laskennan aluksi syöte sijoitetaan ykkösnauhan vasempaan laitaan ja kaikki nauhapäät nauhojensa alkuun.

Tällaisen koneen siirtymäfunktion arvot ovat muotoa

$$\delta(q, a_1, \ldots, a_k) = (q', (b_1, \Delta_1), \ldots, (b_k, \Delta_k)),$$

missä $a_1, \ldots, a_k$ ovat nauhoilta $1, \ldots, k$ luetut merkit, $b_1, \ldots, b_k$ niiden tilalle kirjoitettavat merkit, ja $\Delta_1, \ldots, \Delta_k \in \{L, R\}$ nauhapäiden siirtosuunnat.

Formaalisti *k-nauhainen Turingin kone* on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathsf{acc}}, q_{\mathsf{rej}}),$$

missä muut komponentit ovat kuten standardimallissa, paitsi siirtymäfunktio:

$$\delta : (Q - \{q_{\mathsf{acc}}, q_{\mathsf{rej}}\}) \times (\Gamma \cup \{>, <\})^k \to Q \times ((\Gamma \cup \{>, <\}) \times \{L, R\})^k.$$

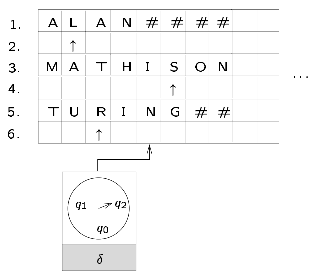
Seuraajatilannerelaatio ym. peruskäsitteet määritellään pienin muutoksin entiseen tapaan.

Lause 4.2. Jos formaali kieli L voidaan tunnistaa k-nauhaisella Turingin koneella, se voidaan tunnistaa myös standardimallisella Turingin koneella.

Todistus (idea). Olkoon

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathsf{acc}}, q_{\mathsf{rej}})$$

k-nauhainen Turingin kone, joka tunnistaa kielen L. Konetta M voidaan simuloida $2k$-uraisella koneella $\widehat{M}$ siten, että koneen $\widehat{M}$ parittomat urat $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ vastaavat M:n nauhoja $1, 2, \ldots, k$, ja kutakin paritonta uraa seuraavalla parillisella uralla on merkillä $\uparrow$ merkitty vastaavan nauhan nauhapään sijainti.



Simuloinnin aluksi syötemerkkijono sijoitetaan normaalisti koneen $\widehat{M}$ ykkösuralle. Ensimmäisessä siirtymässään $\widehat{M}$ merkitsee nauhapääosoittimet $\uparrow$ parillisten urien ensimmäisiin merkkipaikkoihin.

Tämän jälkeen $\widehat{M}$ toimii "pyyhkimällä" nauhaa edestakaisin sen alku- ja loppumerkin välillä. Vasemmalta oikealle pyyhkäisyllä $\widehat{M}$ kerää tiedot kunkin osoittimen kohdalla olevasta M:n nauhamerkistä. Kun kaikki merkit ovat selvillä, $\widehat{M}$ simuloi yhden M:n siirtymän, ja takaisin oikealta vasemmalle suuntautuvalla pyyhkäisyllä kirjoittaa $\uparrow$-osoittimien kohdalle asianmukaiset uudet merkit ja siirtää osoittimia. $\square$

3. Epädeterministiset koneet

Formaalisti *epädeterministinen Turingin kone* on seitsikko

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}),$$

missä muut komponentit ovat kuten deterministisessä standardimallissa, paitsi siirtymäfunktio:

$$\begin{aligned}\delta : (Q - \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}) \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \to \\ \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \cup \{>, <\}) \times \{L, R\}).\end{aligned}$$

Siirtymäfunktion arvon

$$\delta(q, a) = \{(q_1, b_1, \Delta_1), \ldots, (q_k, b_k, \Delta_k)\}$$

tulkinta on, että ollessaan tilassa q ja lukiessaan merkin a kone voi toimia jonkin kolmikon (q_i, b_i, Δ_i) mukaisesti.

Epädeterministisen koneen tilanteet, tilannejohdot jne. määritellään formaalisti samoin kuin deterministisenkin koneen tapauksessa, paitsi että ehdon $\delta(q, a) = (q', b, \Delta)$ sijaan kirjoitetaan $(q', b, \Delta) \in \delta(q, a)$.

Tämän muutoksen takia seuraajatilannerelaatio $\underset{M}{\vdash}$ ei ole enää yksiarvoinen: koneen tilanteella (q, w) voi nyt olla useita vaihtoehtoisia seuraajia, so. tilanteita (q', w'), joilla $(q, w) \underset{M}{\vdash} (q', w')$.

Koneen M tunnistama kieli määritellään:

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid (q_0, \underline{x}) \underset{M}{\vdash}^* (q_{\text{acc}}, w) \text{ jollakin } w \in \Gamma^*\}.$$

Epädeterministisen koneen M tapauksessa siis merkkijono x kuuluu M:n tunnistamaan kieleen, jos *jokin* M:n kelvollinen tilannejono johtaa alkutilanteesta syötteellä x hyväksyvään lopputilanteeseen.

Esimerkki. Yhdistettyjen lukujen "tunnistaminen" epädeterministisillä Turingin koneilla.

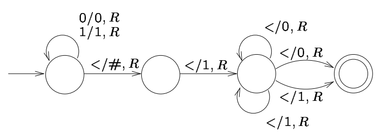
Ei-negatiivinen kokonaisluku n on *yhdistetty*, jos sillä on kokonaislukutekijät $p, q \geq 2$, joilla $pq = n$. Luku, joka ei ole yhdistetty, on *alkuluku*.

Oletetaan, että on jo suunniteltu deterministinen kone CHECK_MULT, joka tunnistaa kielen

$$\begin{aligned}&L(\text{CHECK\_MULT}) = \\ &\quad \{n\#p\#q \mid n, p, q \text{ binäärilukuja, } n = pq\}.\end{aligned}$$

Olkoon lisäksi GO_START deterministinen Turingin kone, joka siirtää nauhapään osoittamaan nauhan ensimmäistä merkkiä.

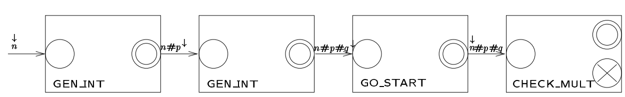
Olkoon edelleen GEN_INT seuraava mielivaltaisen ykköstä suuremman binääriluvun nauhan loppuun tuottava epädeterministinen Turingin kone:



Epädeterministinen Turingin kone TEST_COMPOSI joka tunnistaa kielen

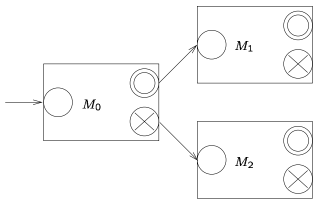
$$\begin{aligned}&L(\text{TEST\_COMPOSITE}) = \\ &\quad \{n \mid n \text{ on binäärimuotoinen yhdistetty luku}\}\end{aligned}$$

voidaan muodostaa näistä komponenteista yhdistämällä:



Yhdistetty kone hyväksyy syötteenä annetun binääriluvun n, jos ja vain jos on olemassa binääriluvut $p, q \geq 2$, joilla $n = pq$ — siis jos ja vain jos n on yhdistetty luku.

Huom. Yleinen kaaviomerkintä Turingin koneiden yhdistämiselle:



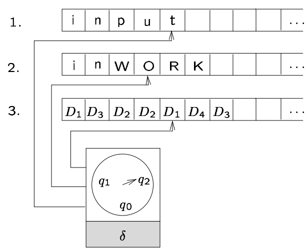
Lause 4.3 Jos formaali kieli L voidaan tunnistaa epädeterministisellä Turingin koneella, se voidaan tunnistaa myös standardimallisella deterministisellä Turingin koneella.

Todistus (idea). Olkoon

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$$

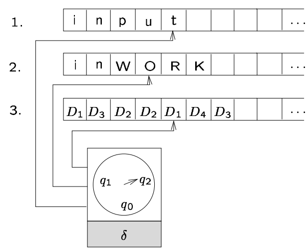
epädeterministinen Turingin kone, joka tunnistaa kielen L. Konetta M voidaan simuloida kolmenauhaisella deterministisellä koneella $\widehat{M}$, joka käy systemaattisesti läpi M:n mahdollisia laskentoja (tilannejonoja), kunnes löytää hyväksyvän — jos sellainen on olemassa. Kone $\widehat{M}$ voidaan edelleen muuntaa standardimalliseksi edellisten lauseiden konstruktioilla.

Yksityiskohtaisemmin:



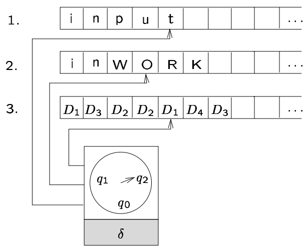
Nauhalla 1 $\widehat{M}$ säilyttää kopiota syötejonosta ja nauhalla 2 se simuloi koneen M työnauhaa. Kunkin simuloitavan laskennan aluksi $\widehat{M}$ kopioi syötteen nauhalta 1 nauhalle 2 ja pyyhkii pois nauhalle 2 edellisen laskennan jäljiltä mahdollisesti jääneet merkit.

Nauhalla 3 $\widehat{M}$ pitää kirjaa vuorossa olevan laskennan "järjestysnumerosta".



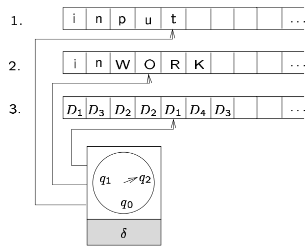
Tarkemmin sanoen, olkoon r suurin M:n siirtymäfunktion arvojoukon koko. Tällöin $\widehat{M}$:lla on erityiset nauhamerkit $D_1, \ldots, D_r$, joista koostuvia jonoja se generoi nauhalle 3 kanonisessa järjestyksessä: ε, D_1, D_2, ..., D_r, D_1D_1, D_1D_2, ..., D_1D_r, D_2D_1, ...

Kutakin generoitua jonoa kohden $\widehat{M}$ simuloi yhden M:n osittaisen laskennan, jossa epädeterministiset valinnat tehdään kolmosnauhan koodijonon ilmaisemalla tavalla.



Esimerkiksi jos kolmosnauhalla on jono $D_1 D_3 D_2$, niin ensimmäisessä siirtymässä valitaan vaihtoehto 1, toisessa vaihtoehto 3, kolmannessa vaihtoehto 2. Ellei tämä laskenta johtanut M:n hyväksyvään lopputilaan, generoidaan seuraava koodijono $D_1 D_3 D_3$ ja aloitetaan alusta.

Jos koodijono on epäkelpo, so. jos siinä jossakin kohden on tilanteeseen liian suuri koodi, simuloitu laskenta keskeytetään ja generoidaan seuraava jono.



Selvästi tämä systemaattinen koneen M laskentojen läpikäynti johtaa koneen $\widehat{M}$ hyväksymään syötejonon, jos ja vain jos koneella M on syötteen hyväksyvä laskenta. Jos hyväksyvää laskentaa ei ole, kone $\widehat{M}$ ei pysähdy. □