

## Tietojenkäsittelyteorian perusteet

## Harjoitus 1, 18.–20.9.

## Tehtävät

**Kotitehtävät:**

1. Olkoon  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{b, d\}$  ja  $C = \{a, c, d, e\}$ . Kirjoita auki (so. luettele alkioittain) seuraavat joukot:

- (a)  $A \cup (C - B)$ ;  
 (b)  $B \times (A \cap C)$ ;  
 (c)  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) - \mathcal{P}(\emptyset)$ .

2. Olkoon perusjoukon  $A = \{a, b, c, d\}$  relaatio  $R \subseteq A \times A$  määritelty:

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, c), (d, b)\}.$$

Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:

- a)  $R$ ,      c)  $R \circ R$ ,  
 b)  $R^{-1}$ ,    d)  $R \cup (R \circ R)$ .

Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?

3. (a) Luettele kaikki joukon  $\{a, b, c\}$  ekvivalenssirelaatiot (ositukset).  
 (b) Todista induktiolla oikeaksi kaava

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

**Demonstraatiotehtävät:**

4. Todista oikeiksi seuraavat joukkojen yhdisteiden ja leikkausten osittelulait:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

5. Määritellään perusjoukossa  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  relaatio  $\sim$  säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti (“geometrisesti”) sen ekvivalenssiluokkia.

6. Todista induktiolla, että jos  $X$  on äärellinen joukko, jonka koko on  $n = |X|$ , niin sen potenssijoukon koko on  $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ .