

4. **Tehtävä:** Osoita, että mikä tahansa vähintään kaksimerkkinen aakkosto  $\Sigma$  on samanveroinen binääriaakkoston  $\Gamma = \{0, 1\}$  kanssa siinä mielessä, että  $\Sigma$ :n merkkijonot voidaan helposti koodata  $\Gamma$ :n merkkijonoiksi ja kääntäen. Miten paljon merkkijonon pituus voi muuttua suunnittelemassasi koodauksessa? (Siis jos merkkijonon  $w \in \Sigma^*$  pituus on  $|w| = n$  merkkiä, mikä on sen vastinjonon  $w' \in \Gamma^*$  pituus?) Onnistuisiko vastaava koodaus, jos kohdeaakkostossa olisikin vain *yksi* merkki, esim.  $\Gamma = \{1\}$ ?

**Vastaus:** Olkoon  $\Sigma$  jokin  $k$ -merkkinen aakkosto,  $k > 1$ .  $\Sigma$ :n merkkijonot voidaan koodata  $\Gamma = \{0, 1\}$ :n merkkijonoiksi seuraavasti:

- Samaistetaan  $\Sigma$ :n aakkosto kokonaislukujen  $\{1, \dots, k\}$  kanssa.
- Nämä luvut (eli  $\Sigma$ :n aakkosto) voidaan esittää  $\lceil \log_2 k \rceil$ :n mittaisina binäärilukuina.
- Jokainen  $\Sigma$ :n merkkijono voidaan siis esittää  $\Gamma$ :n merkkijonona korvaamalla  $\Sigma$ :n aakkokset merkkijonossa niiden binäärikoodauksella.

Koodauksen purku  $\Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$  onnistuu vastaavasti ottamalla merkkijonosta  $\lceil \log_2 k \rceil$ :n mittaiset merkkijonot ja tulkitsemalla ne  $\Sigma$ :n aakkosiksi.

Jos merkkijonon  $w \in \Sigma^*$  pituus on  $|w| = n$  merkkiä on tällöin sen vastinjonon  $w' \in \Gamma^*$  pituus  $|w'| = n \cdot \lceil \log_2 k \rceil$ , sillä jokaisen  $\Sigma$ :n merkin koodaamiseen tarvitaan  $\lceil \log_2 k \rceil$  merkkiä.

Tarkastellaan esimerkiksi aakkostoa  $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$  ja merkkijonoa  $aacfd$ . Koska  $|\Sigma| = 6$ , tarvitaan symbolien esittämiseen  $\lceil \log_2 6 \rceil = \lceil 2.58 \rceil = 3$  bittiä. Yksi mahdollinen koodaus on:

$$\begin{array}{ll} a \mapsto 001 & d \mapsto 100 \\ b \mapsto 010 & e \mapsto 101 \\ c \mapsto 011 & f \mapsto 110 \end{array}$$

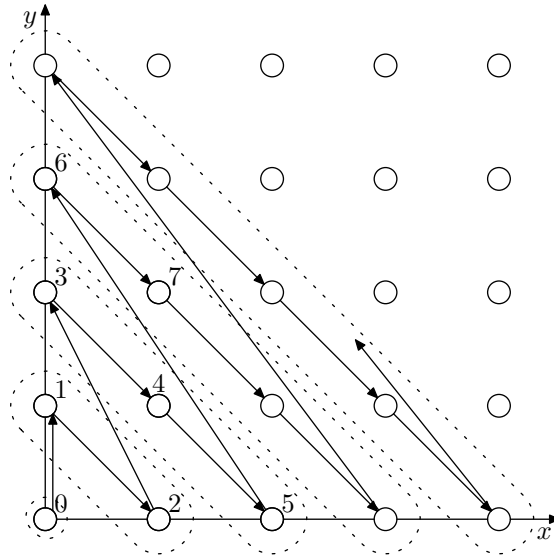
Tällöin jonon  $aacfd$  esitys on 001001011110100.

Vastaavaa koodausta ei voida rakentaa, mikäli  $\Gamma = \{1\}$ . Luvuille voidaan kyllä määrittää unaariesitys seuraavasti:  $1 \mapsto 1$ ,  $2 \mapsto 11$ ,  $3 \mapsto 111$ , ..., mutta näin syntynyttä koodia ei voida enää purkaa yksikäsitteisesti. Esim. lukujot  $1\ 1\ 1$ ,  $1\ 2$ ,  $2\ 1$  ja  $3$  koodautuvat kaikki merkkijonoksi 111.

5. **Tehtävä:** Osoita, että karteellinen tulo  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit  $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sijoitetuiksi euklidiseen  $(x, y)$ -tasoon  $\mathbb{R}^2$ . Numeroi parit suoran  $y = -x$  suuntaisiin vinoriveihin.) Päättele tämän tuloksen ja tehtävän 3 perusteella, että myös rationaalilukujen joukko  $\mathbb{Q}$  on numeroituvasti ääretön.

**Vastaus:** Joukko  $S$  on numeroituvasti ääretön, mikäli voidaan muodostaa bijektio  $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ . Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että kaikille joukon  $S$  alkioille voidaan asettaa yksikäsitteinen järjestysnumero.

Joukon  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  alkiot  $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  voidaan numeroida seuraavan kuvan mukaisesti:



Ajatuksena on siis järjestää kaikki lukuparit suoran  $y = -x$  suuntaisiin jonoihin, ja numeroida nämä jonot alkioittain yksi kerrallaan lyhyimmistä alkaen. Tässä numerointia ei voida suorittaa  $x$ -akselin suuntaisesti, sillä silloin kaikki indeksit kuluisivat jo  $y$ -akselin läpikäyntiin eikä yhtään lukuparia  $(x, y), y > 0$  saavutettaisi koskaan.

Ylläoleva numerointi voidaan määrittellä seuraavasti:

$$f(x, y) = x + \sum_{k=1}^{x+y} k = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

Esimerkiksi  $f(3, 1) = 13$ , eli lukuparin  $(3, 1)$  järjestysnumero on 13. Todettakoon vielä, että funktio  $f(x, y)$  on todellakin bijektio, eli kutakin järjestysnumeroa vastaa yksikäsitteinen lukupari. Koordinaattiparin laskeminen annetusta indeksistä on kuitenkin hankalampaa, ja se jätetäänkin vastausten lopussa olevaan liitteeseen tiedoksi asiasta kiinnostuneille.

Positiiviset rationaaliluvut voidaan esittää  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -lukuparina s.e.  $(x, y) \equiv \frac{x}{y}, y \neq 0$ . Tämä on numeroituvasti äärettömän joukon  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  aito osajoukko. Tehtävän 3 perusteella  $\mathbb{Q}$  on joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Jos  $\mathbb{Q}$  olisi äärellinen, olisi olemassa joku rationaaliluku  $\frac{x}{y}, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$ , jolla olisi suurin järjestysluku  $n < \infty$  ( $\mathbb{Q}$ :n numeroinnissa). Kuitenkin voidaan aina löytää yo. kuvan perusteella rationaaliluku, jolla olisi järjestysluku  $n' > n$ , joten tämä on ristiriita oletuksen  $\mathbb{Q}$  on äärellinen kanssa. Näin ollen  $\mathbb{Q}$  on numeroituvasti ääretön.

6. **Tehtävä:** Olkoon  $S$  mielivaltainen epätyhjä joukko.

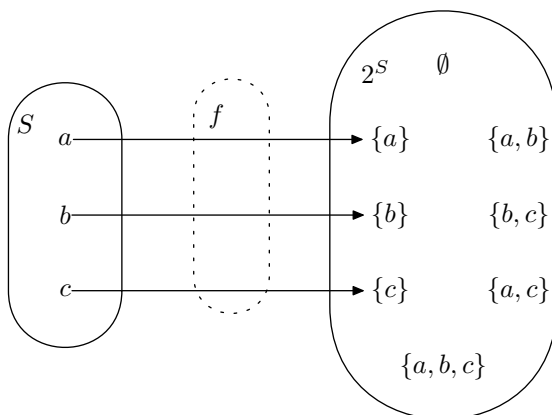
- Muodosta jokin injktiivinen funktio  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ .
- Osoita, että ei ole mahdollista muodostaa injktiota  $g : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$ . (Vihje: Oletetaan, että tällainen injktio  $g$  olisi olemassa. Tarkastellaan joukkoa  $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$  ja merkitään  $r = g(R)$ . Onko tällöin  $r \in R$ ?)

Totea (b)-kohdan seurauksena, että minkä tahansa numeroituvasti äärettömän joukon  $S$  potenssijoukko on ylinumeroituva.

**Vastaus:** Oletetaan  $S \neq \emptyset$  mielivaltainen.

- Määritetään  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  s.e.  $f$  on injktio. Kaikilla  $a \in S$  on olemassa  $\{a\} \in \mathcal{P}(S)$  ja jos  $a \neq b$ , niin  $\{a\} \neq \{b\}$ , joten kuvaus  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S), f(a) = \{a\}$  on halutunlainen injktio.

Alla on esitetty kuvaus  $f$  joukolle  $S = \{a, b, c\}$ :



(b) Oletetaan, että on olemassa injektio  $g : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$ . Tarkastellaan joukkoa  $R = \{s \in S \mid s \notin g^{-1}(s)\}$  ja merkitään  $r = g(R)$ .

Jos  $r \in R$ , pätee  $r \notin g^{-1}(r) = g^{-1}(g(R)) = R$ . Toisaalta jos  $r \notin R$ , pätee  $r \in g^{-1}(r) = g^{-1}(g(R)) = R$ . Nämä molemmat johtavat ristiriitaan, joten täytyy olla niin, että  $R = \emptyset$  ja kaikilla  $s \in S$  pätee  $s \in g^{-1}(s)$ .

Nyt  $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$  ja injektio  $g$  kuvaa sen jollekin  $S$ :n alkioille:  $g(\emptyset) = x \in S$ . Nyt pitäisi päteä  $x \in g^{-1}(x) = \emptyset$ , mikä on ristiriita, sillä mikään alkio ei voi kuulua tyhjiin joukkoon. (Koska kuvaus  $g$  on injektio täytyy  $x$ :n alkukuvan olla yksikäsitteinen.)

(b)-kohdan perusteella ei ole mahdollista muodostaa injektiota  $g : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$ . Lisäksi jos  $S$  on numeroituvasti ääretön, on olemassa bijektio  $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ . Jotta  $\mathcal{P}(S)$  olisi numeroituva, pitäisi olla bijektio  $f' : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(S)$ . Oletetaan, että tällainen bijektio  $f'$  olisi olemassa. Kuvaus  $g \circ f'^{-1} : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$  on tällöin bijektio (eli injektio ja surjektio), mikä on ristiriidassa sen kanssa, että ei ole olemassa injektiota  $\mathcal{P}(S) \rightarrow S$ . Näin ollen  $\mathcal{P}(S)$  on ylinumeroituva.

**Liite: koordinaattiparin laskeminen järjestysnumerosta tehtävässä 4.**

Olkoon annettuna järjestysnumero  $m$  ja halutaan laskea koordinaatit  $x$  ja  $y$  siten, että

$$x + \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} = m . \tag{1}$$

Merkitään  $z = x + y$ , jolloin (1) muuttuu muotoon:

$$z - y + \frac{z(z + 1)}{2} = m . \tag{2}$$

Koska  $z - y \geq 0$ ,

$$\frac{z(z + 1)}{2} \leq m , \text{ joten} \tag{3}$$

$$z \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2} \tag{4}$$

Koska  $z \in \mathbb{N}$  ja  $m, x, y \geq 0$ , huomataan, että:

$$z = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{1 + 8m}}{2} \right\rfloor \tag{5}$$

Nyt voidaan laskea sekä  $x$  että  $y$  käyttäen apuna indeksointifunktiota  $f$ :

$$\begin{aligned} x &= m - f(0, z) \\ y &= z - x \end{aligned} \tag{6}$$

Tässä  $f(0, z)$  antaa  $(x, y)$ :n vinorivin ensimmäisen alkion järjestysnumeron. Lasketaan esimerkiksi indeksää  $m = 13$  vastaava pari:

$$z = \left\lfloor \frac{-1 + \sqrt{105}}{2} \right\rfloor = \lfloor 4.62 \rfloor = 4$$
$$x = 13 - f(0, 4) = 13 - 10 = 3$$
$$y = 4 - 3 = 1$$

Tulokseksi saatiin pari  $(3, 1)$  niin kuin pitikin.