T-79.148 **Syksy 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 1
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä:** Todista oikeiksi seuraavat joukkojen yhdisteiden ja leikkausten osittelulait:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Vastaus: Kerrataan aluksi joukkojen yhteneväisyyden määritelmä: Olkoon A ja B joukkoja. Tällöin $A = B$ mikäli sekä $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Lait voidaan siis todistaa osoittamalla että yhtäsuurusmerkin kummallakin puolella olevat joukot ovat toistensa osajoukkoja.

Todistetaan ensin:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Tarkastellaan alkiota $x \in A \cap (B \cup C)$. Leikkauksen määritelmän mukaan tällöin $x \in A$ ja $x \in B \cup C$. Yhdisteen määritelmästä puolestaan seuraa, että $x \in B$ tai $x \in C$ (tai molemmat, mutta tätä tapausta ei tarvitse erikseen tarkastella). Ensimmäisessä tapauksessa toteutuvat ehdot $x \in A$ ja $x \in B$, joten $x \in A \cap B$. Jälkimmäisessä tapauksessa vastaavasti $x \in A$ ja $x \in C$, joten $x \in A \cap C$. Näin ollen, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ja

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

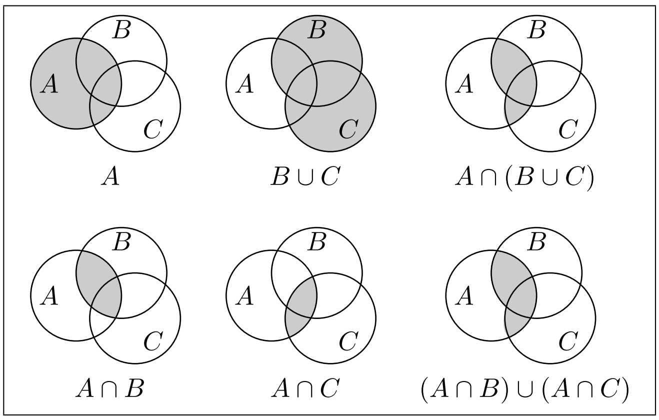
Valitaan nyt vastaavasti alkio $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Tällöin on taas kaksi mahdollista tilannetta:

i) $x \in (A \cap B)$; tai
ii) $x \in (A \cap C)$

Koska kaikille joukoille B ja C pätee: $B \subseteq (B \cup C) \supseteq C$, niin molemmissa tapauksissa $x \in A \cap (B \cup C)$, joten:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \ .$$

Koska molemmat joukot ovat toistensa osajoukkoja, $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$. Venn-kaavioilla voidaan havainnollistaa tätä osittelulakia seuraavasti:



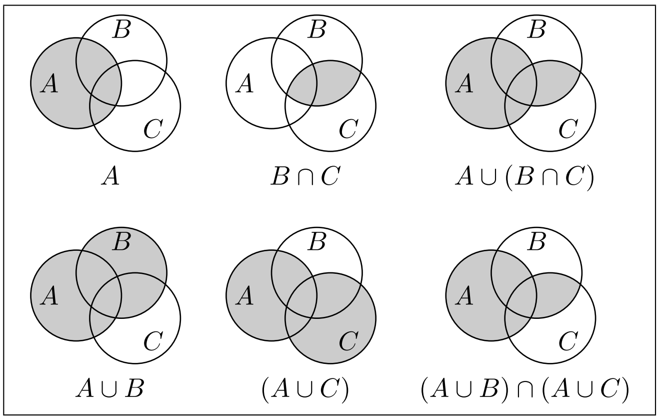
Toinen osittelulaki
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
voidaan todistaa vastaavasti. Mikäli $x \in A \cup (B \cap C)$, niin joko $x \in A$ tai $x \in B \cap C$. Jos $x \in A$, niin $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, joten $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Toisessa tapauksessa $x \in B \cap C$. Tällöin pätee $x \in B$ ja $x \in C$, joten myös $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, eli

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)\ .$$

Toiseen suuntaan: Jos $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, niin $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Jos nyt $x \in A$, niin $x \in A \cup (B \cap C)$ triviaalisti. Mikäli puolestaan $x \notin A$, niin välttämättä $x \in B$ ja $x \in C$, joten $x \in B \cap C$ ja $x \in A \cup (B \cap C)$. Näin saadaan

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C),$$

joten laki pätee. Tämä laki voidaan esittää kaavioilla seuraavasti:



5. **Tehtävä:** Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

Vastaus: Relaatio $\backsim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ on määritelty seuraavasti:

$$(m, n) \backsim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q$$

Toisin sanoen, kaksi lukuparia ovat ekvivalentit silloin, kun niiden summat ovat samat.

Relaatio on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle $\backsim$.

i) Relaatio $\backsim$ on symmetrinen, jos $(m, n) \backsim (p, q)$ aina kun $(p, q) \backsim (m, n)$. Koska

$$m + n = p + q \Leftrightarrow p + q = m + n,$$

kuuluu $((p, q), (m, n))$ aina relaatioon, kun $((m, n), (p, q))$ kuuluu, joten symmetrisyys toteutuu.

ii) Relaatio $\backsim$ on refleksiivinen, jos kaikille $(m, n) \in \mathbb{N}$ pätee $(m, n) \backsim (m, n)$. Koska

$$m + n = m + n,$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio $\backsim$ on transitiivinen, jos aina kun $(m,n) \backsim (p,q)$ ja $(p,q) \backsim (k,l)$ myös $(m,n) \backsim (k,l)$. Jos pätee:

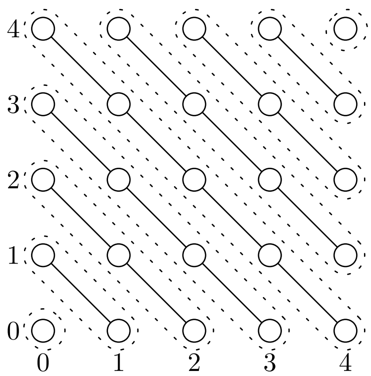
$$m + n = p + q \text{ ja } p + q = k + l,$$

niin

$$m + n = p + q = k + l \Rightarrow m + n = k + l,$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on $\backsim$ ekvivalenssirelaatio. Alla on relaation graafiesityksen alkuosa:



Kaaviosta nähdään, että relaation määräämät ekvivalenssiluokat vastaavat suoran $y = -x$ suuntaisia suoria.

6. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Vastaus: Perustapaus: $X = \emptyset$. Tällöin $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ja $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

Induktio-oletus: oletetaan että on olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että sääntö pätee kaikille $n \leq k$.

Induktioaskel: olkoon $|X| = k + 1$. Merkitään $X = Y \cup \{x\}$ $(x \notin Y)$. Induktio-oletuksen perusteella $|\mathcal{P}(Y)| = 2^k$. $|\mathcal{P}(X)|$:ään kuuluvat kaikki $|\mathcal{P}(Y)|$:n joukot sekä $|\mathcal{P}(Y)|$:n joukkojen unioni joukon $\{x\}$:n kanssa. Saadaan $|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.