Tik-79.148 **Kevät 2001**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 8
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. Turingin koneen muodostaa kaksi komponenttia, kontrolliyksikkö ja syötenauha. Kontrolliyksikkö koostuu joukosta tiloja, ja se toimiikin samaan tapaan kuin tavallinen tilakone. Syötenauhan toiminta puolestaan poikkeaa huomattavasti tilakoneen syötenauhasta. Turingin kone voi siirtää lukupäätään pitkin nauhaa sekä oikealle että vasemmalle, ja se voi myös kirjoittaa nauhalle uusia symboleita. Syötenauha on oikealle päin äärettömän mittainen, vasemmalla sitä rajoittaa nauhan aloitusmerkki $\triangleright$. Turingin koneen saama syöte on kirjoitettuna nauhan vasempaan päähän, ja syötteestä oikealle nauha on tyhjä (eli sisältää tyhjiä merkkejä $\sqcup$)[1].

   Turingin koneen laskenta tapahtuu seuraavasti:

   (a) Kone lähtee liikkeelle alkukonfiguraatiosta $(s, \triangleright \sqcup w\underline{\sqcup})$, missä s on koneen alkutila, w koneen syöte ja lukupään paikkaa merkitään alleviivauksella. Kaikki lukupäästä oikealle olevat nauhan paikat ovat tyhjiä.
   (b) Jokaisella laskenta-askeleella kone katsoo, mikä merkki on kirjoitettuna nauhalle lukupään kohdalle. Tämän ja koneen nykyisen tilan perusteella valitaan siirtymä uuteen tilaan. Samalla joko nauhalle kirjoitetaan uusi merkki tai siirretään lukupäätä.
   (c) Laskennan lopuksi kone siirtyy erityiseen lopputilaan h. Laskennan tulos on nauhalla oleva merkkijono. On myös mahdollista, että kone ei koskaan päädy h eikä siis pysähdy koskaan.

   Turingin kone voidaan määritellä formaalisti muutamallakin eri tapaa. Tämän kurssin materiaalissa esiintyy kaksi toisistaan hieman poikkeavaa, mutta käytännössä ekvivalenttia, määritelmää. Molemmilla määritelmillä on omat etunsa, eikä niistä voi sanoa, että toinen olisi toista parempi.

   (a) Oppikirjan vanhempi painos[2] määrittelee Turingin koneen M seuraavasti:
   $$M = (K, \Sigma, \delta, s),$$
   missä
      - K on äärellinen tilojen joukko, johon *ei* kuulu lopputila h.
      - Σ on äärellinen aakkosto, johon kuuluu tyhjä merkki $\#$, mutta ei lukupään siirtomerkkejä L ja R.
      - $\delta : (K \times \Sigma) \to (K \cup \{h\} \times \Sigma \cup \{L, R\})$ on tilansiirtofunktio.
      - $s \in K$ on alkutila.

   (b) Oppikirjan uudempi painos puolestaan määrittelee Turingin koneen seuraavasti:
   $$M = (K, \Sigma, \delta, s, H),$$
   missä

[1] Tässä on huomattava, että $\sqcup \neq e$.
[2] Luentokalvot käyttävät myös tätä määritelmää.

	Vanha painos	Uusi painos
Määritelmä	$M = (K, \Sigma, \delta, s)$	$M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$
Lopputilat	$h \notin K$	$H = \{h, y, n\} \subseteq K$
Tilansiirtofunktio	$K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$	$(K - H) \times \Sigma \to (K \times \Sigma \cup \{\leftarrow, \to\})$
Tyhjä merkki	$\#$	$\sqcup$
Lukupåån siirto	$\{L, R\}$	$\{\leftarrow, \to\}$
Alkukonfiguraatio	$(s, \#w\underline{\#})$	$(s, \rhd\underline{\sqcup}w)$
Kielen L ratkaiseminen	$(s, \#w\underline{\#}) \vdash^* \begin{cases}(h, \#Y\underline{\#}), w \in L \\ (h, \#N\underline{\#}), w \notin L\end{cases}$	$(s, \rhd\underline{\sqcup}w) \vdash^* \begin{cases}(y, \rhd v), w \in L \\ (n, \rhd v), w \notin L\end{cases}$
Funktio $f(x) = y$	$(s, \#x\underline{\#}) \vdash^* (h, \#y\underline{\#}$	$(s, \rhd\underline{\sqcup}x) \vdash^* (h, \rhd\underline{\sqcup}y)$

Taulukko 1: Kahden eri Turingin koneen määritelmän vertailu

- K on äärellinen tilajoukko.
- Σ on äärellinen aakkosto, johon kuuluu tyhjä merkki $\sqcup$ sekä nauhan alkumerkki $\rhd$, mutta ei lukupään siirtomerkkejä $\leftarrow$ ja $\to$.
- $\delta : (K - H) \times \Sigma \to K \times (\Sigma \cup \{\leftarrow, \to\}$ on tilansiirtofunktio, jonka täytyy aina toteuttaa seuraavat kaksi ehtoa:
  i. Kaikilla $q \in K - H$, mikäli $\delta(q, \rhd) = (p, b)$, niin $b = \to$.
  ii. Kaikilla $q \in K - H$ ja $a \in \Sigma$, mikäli $\delta(q, a) = (p, b)$, niin $b \neq \rhd$.
- $s \in K$ on alkutila.
- $H \subseteq K$ on lopputilojen joukko.

Selväkielelle käännettynä tilansiirtofunktion vaatimukset tarkoittavat yksinkertaisesti sitä, että koneen täytyy aina aloitusmerkin $\rhd$ nähdessään palauttaa lukupää yhden askeleen verran oikealle ja että se ei saa itse kirjoittaa aloitusmerkkiä nauhalle.

Näissä mallivastauksissa käytetään yleisesti ottaen uudemman määritelmän merkintätapoja, mutta koneiden aloitus- sekä lopetuskonfiguraatiot esitetään vanhemman määritelmän mukaisesti. Perusteluna tälle käytännölle on se, että Turingin koneiden yhdistäminen on helpompaa, kun niiden laskenta on määritelty vanhemman käytännön mukaisesti.

Tehtävässä annettiin Turingin kone $M = (K, \Sigma, \delta, s, \{h\})$, jossa

$$K = \{q_0, q_1, q_2, h\}$$
$$\Sigma = \{a, \sqcup, \rhd\}$$
$$s = q_0$$

ja

q	σ	$\delta(q, \sigma)$	q	σ	$\delta(q, \sigma)$	q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	$(q_1, \leftarrow)$	q_1	a	$(q_2, \sqcup)$	q_2	a	(q_2, a)
q_0	$\sqcup$	$(q_0, \sqcup)$	q_1	$\sqcup$	$(h, \sqcup)$	q_2	$\sqcup$	$(q_0, \leftarrow)$
q_0	$\rhd$	$(q_0, \to)$	q_1	$\rhd$	$(q_1, \to)$	q_2	$\rhd$	$(q_2, \to)$

Tutkitaan koneen käyttäytymistä eri n:n arvoilla, kun lähdetään liikkeelle konfiguraatiosta $(q_0, \triangleright \sqcup a^n \underline{a})$:

n = 0:
$(q_0, \triangleright \sqcup \underline{a}) \vdash_M (q_1, \triangleright \underline{\sqcup} a) \vdash_M (h, \triangleright \underline{\sqcup} a)$

n = 1:
$(q_0, \triangleright \sqcup a\underline{a}) \vdash (q_1, \triangleright \sqcup \underline{a}a) \vdash (q_2, \triangleright \sqcup \underline{\sqcup} a) \vdash_M (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \sqcup a) \vdash_M^* (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \sqcup a)$

n = 2:
$(q_0, \triangleright \sqcup aa\underline{a}) \vdash_M (q_1, \triangleright \sqcup a\underline{a}a) \vdash_M (q_2, \triangleright \sqcup a\underline{\sqcup} a) \vdash_M (q_0, \triangleright \sqcup \underline{a} \sqcup a) \vdash_M (q_1, \triangleright \underline{\sqcup} a \sqcup a) \vdash_M (h, \triangleright \underline{\sqcup} a \sqcup a)$

n = 3:
$(q_0, \triangleright \sqcup aaa\underline{a}) \vdash_M (q_1, \triangleright \sqcup aa\underline{a}a) \vdash_M (q_2, \triangleright \sqcup aa\underline{\sqcup} a) \vdash_M (q_0, \triangleright \sqcup a\underline{a} \sqcup a) \vdash_M (q_1, \triangleright \sqcup \underline{a}a \sqcup a) \vdash_M (q_2, \triangleright \sqcup \underline{\sqcup} a \sqcup a) \vdash_M (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \sqcup a \sqcup a) \vdash_M^* (q_0, \triangleright \underline{\sqcup} \sqcup a \sqcup a)$

...

Havaitaan, että koneen käyttäytymiseen vaikuttaa, onko n parillinen vai pariton. Molemmissa tapauksissa kone lukee nauhaa oikealta vasemmalle ja korvaa joka toisen a-kirjaimen tyhjällä merkillä. Kun n on parillinen, kone pysähtyy, kun on päässyt nauhan alkuun. Parittomilla n:n arvoilla kone jää lopuksi kirjoittamaan ikuisessa silmukassa merkkiä $\sqcup$ nauhan ensimmäisen merkin kohdalle eikä koskaan pysähdy (*halt*).

Kun n on parillinen: $(q_0, \triangleright \sqcup a^n \underline{a}) \vdash_M^* (h, \triangleright \underline{\sqcup} a(\sqcup a)^{n/2})$

Kun n on pariton: $(q_0, \triangleright \sqcup a^n \underline{a}) \vdash_M^* (q_0, \triangleright \underline{\sqcup}(\sqcup a)^{(n+1)/2})$

5. Turingin kone M ratkaisee *decides* kielen L, mikäli

$$(s, \triangleright \sqcup w\underline{\sqcup}) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup Y\underline{\sqcup}) \text{ aina kun } w \in L, \text{ ja}$$
$$(s, \triangleright \sqcup w\underline{\sqcup}) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup N\underline{\sqcup}) \text{ aina kun } w \notin L.$$

Toisin sanoen, kun halutaan tutkia kuuluuko sana w kieleen L, annetaan sana w syötteeksi kielen ratkaisevalle Turingin koneelle. Mikäli sana kuuluu kieleen, kone pysähtyy lopulta ja nauhalla on vastaus Y. Mikäli sana ei kuulu kieleen, nauhalle kirjoitetaan lopuksi N.

Kielen $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{: ssä on ainakin yksi } a\}$ ratkaisee Turingin kone

$$\begin{aligned} M &= (K, \Sigma, \delta, s, \{h\}) \\ K &= \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, h\} \\ \Sigma &= \{a, b, Y, N, \sqcup, \triangleright\} \\ s &= q_0 \end{aligned}$$

Tilansiirtofunktioon on merkitty ainoastaan ne tilanteet, jotka ovat mahdollisia oikeanmuotoisella syötteellä:

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	$\sqcup$	$(q_1, \leftarrow)$
q_1	a	$(q_2, \sqcup)$
q_1	b	$(q_0, \sqcup)$
q_1	$\sqcup$	$(q_5, \rightarrow)$
q_2	$\sqcup$	$(q_3, \leftarrow)$
q_3	a	$(q_2, \sqcup)$
q_3	b	$(q_2, \sqcup)$
q_3	$\sqcup$	$(q_4, \rightarrow)$
q_4	$\sqcup$	(q_4, Y)
q_4	Y	$(h, \rightarrow)$
q_5	$\sqcup$	(q_5, N)
q_5	N	$(h, \rightarrow)$

Kone lukee sanaa oikealta vasemmalle. Niin kauan kuin kuin vastaan ei ole tullut yhtään a-kirjainta, kone vaihtelee tilojen q_0 ja q_1 välillä ja samalla tyhjentää nauhaa. Jos sana loppuu ennen kuin ensimmäinen a on löytynyt, kone siirtyy tilaan q_5 ja kirjoittaa nauhalle N. Jos a löytyy, kone tyhjentää nauhan käyttäen tiloja q_2 ja q_3, siirtyy lopuksi tilaan q_4 js kirjoittaa nauhalle Y.

Esimerkiksi:
$(q_0, \triangleright \sqcup ab\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_1, \triangleright \sqcup a\underline{b}) \vdash_M (q_0, \triangleright \sqcup a\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_1, \triangleright \sqcup \underline{a}) \vdash_M$
$(q_2, \triangleright \sqcup \underline{\sqcup}) \vdash_M (q_3, \triangleright\underline{\sqcup}) \vdash_M (q_4, \triangleright \sqcup \underline{\sqcup}) \vdash_M (q_4, \triangleright \sqcup \underline{Y}) \vdash_M (h, \triangleright \sqcup Y\underline{\sqcup})$