Tik-79.148 **Kevät 2001**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 7
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

1. Pinoautomaatti $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, missä K, Σ, s ja F on määritelty samalla tavalla kuin tilakoneellekin. Γ on pinoaakkosto, ja $\Delta \subset \big(K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*\big) \times (K \times \Gamma^*)$ on äärellinen siirtymärelaatio.

   Pinoautomaatissa on epädeterministiseen tilakoneeseen lisätty ääretön pino, jota käytetään laskennan aikana muistina. Ainoastaan pinon huippua voidaan käsitellä.

   Siirtymässä $\big((q_1, a, \alpha), (q_2, \beta)\big)$ siirrytään tilasta q_1 tilaan q_2 lukemalla a syötteestä ja α pinon päältä. Samalla laitetaan β pinoon.

   Epädeterministinen pinoautomaatti M hyväksyy sanan w (eli $w \in L(M)$), mikäli syötteelle on olemassa jokin jono siirtymiä, jotka johtavat alkutilasta lopputilaan ja suorituksen lopuksi pino on tyhjä (eli $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$, jollekin $f \in F$).

   Tehtävässä:

   a)

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{c, d\} \\
\Delta =& \big\{\big((s, a, e), (s, cd)\big), \big((s, e, e), (f, e)\big), \\
& \big((f, b, c), (f, e)\big), \big((f, b, d), (f, e)\big) \\
& \big((f, e, d), (f, e)\big)\big\}
\end{aligned}
$$

   Suorituksen aluksi automaatti lukee kaikki a-kirjaimet ja tallettaa niiden määrän pinoon. Koska n saa olla mitä tahansa välillä $m \leq n \leq 2m$, käytetään pinoaakkosissa kahdenlaisia symboleita. Jokaista pinoon talletettua c-kirjainta kohden täytyy syötteessä olla yksi b-kirjain, mutta d-kirjaimet voi poistaa pinosta myös ilman syötteen lukemista.

b)

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b\} \\
\Delta =& \big\{ \big((s, a, e), (s, a)\big), \big((s, b, e), (s, b)\big), \\
& \big((s, a, e), (f, e)\big), \big((s, b, e), (f, e)\big), \\
& \big((s, e, e), (f, e)\big), \big((f, a, a), (f, e)\big), \\
& \big((f, b, b), (f, e)\big) \big\}
\end{aligned}
$$

Automaatti toimii kahdessa vaiheessa:

i. Ensin luetaan sisään sanan alkupuolisko ja talletetaan luetut kirjaimet pinoon.
ii. Automaatti arvaa epädeterministisesti sanan keskikohdan, minkä jälkeen se poistaa yksitellen merkkejä pinosta ja tarkistaa, että syötteessä jäljellä olevat merkit ovat samat kuin pinosta poistetut merkit.

2. Mille tahansa pinoautomaatille $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ voidaan määritellä kieli:

$$L_f(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha) \text{ jollekin } f \in F, \alpha \in \Gamma^*\}$$

Kieleen $L(M)$ kuuluvat ne sanat, joille on olemassa jokin pinoautomaatin suoritus, joka päätyy lopputilaan siten, että syöte on käyty loppuun ja pino on tyhjä. $L_f(M)$ lisää tähän ne sanat, joille pino ei ole tyhjä suorituksen loppuessa. Tehtävän tavoitteena on osoittaa, että $L(M)$ ja $L_f(M)$ ovat ilmaisuvoimaltaan yhtä voimakkaita.

a) Aluksi on osoitettava, että jokaiselle pinoautomaatille M on olemassa jokin automaatti M' siten, että $L(M') = L_f(M)$.
M' voidaan muodostaa siten, että lisätään M:ään uusi lopputila, jota käytetään pinon tyhjentämiseen suorituksen lopuksi:

$$
\begin{aligned}
M' =& (K', \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F') \\
K' =& K \cup \{f'\}, f' \notin K \\
F' =& \{f'\} \\
\Delta' =& \Delta \cup \big\{ \big((f, e, e), (f', e)\big) \mid f \in F \big\} \\
& \cup \big\{ \big((f', e, \alpha), (f', e)\big) \mid \alpha \in \Gamma \big\}
\end{aligned}
$$

Nyt jos $w \in L_f(M)$, niin $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha)$ joillakin $\alpha \in \Gamma^*$ ja $f \in F$. Tällöin myös (koska automaattien siirtymät ovat lisäyksiä lukuunottamatta samat) $(s, w, e) \vdash_{M'}^* (f, e, \alpha) \vdash_{M'} (f', e, \alpha) \vdash_{M'}^* (f', e, e)$, joten $w \in L(M')$.
Toiseen suuntaan: jos $w \in L(M')$, niin $(s, w, e) \vdash_{M'}^* (f, e, \alpha) \vdash_{M'}^* (f', e, e)$. Tällöin $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha)$, eli $w \in L_f(M)$.

b) Vielä täytyy osoittaa, että on olemassa jokin pinoautomaatti M'' siten, että $L_f(M'') = L(M)$. Eräs mahdollinen tapa konstruoida M'' on sijoittaa suorituksen aluksi pinon pohjalle jokin symboli γ, joka ei kuulu Γ:aan, ja muuten toimia kuten M. Nyt kaikille sanoille $w \in L(M)$ päädytään konfiguraatioon (f'', e, γ), joten $w \in L_f(M'')$. Formaalimmin:

$$\begin{aligned}
M'' =& (K'', \Sigma, \Gamma'', \Delta'', s'', F'') \\
K'' =& K \cup \{f'', s''\}, f'', s'' \notin K \\
\Gamma'' =& \Gamma \cup \{\gamma\}, \gamma \notin \Gamma \\
F'' =& \{f''\} \\
\Delta'' =& \Delta \cup \big\{\big((s'', e, e), (s, \gamma)\big), \big((f, e, \gamma), (f'', \gamma)\big) \mid f \in F\big\}
\end{aligned}$$

Jos $w \in L(M)$, eli $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$ jollakin $f \in F$, niin myös $(s'', w, e) \vdash_{M''} (s, w, \gamma) \vdash_{M''}^* (f, e, \gamma) \vdash_{M''} (f'', e, \gamma)$, joten $w \in L_f(M'')$.

Toiseen suuntaan: Jos $w \in L_f(M'')$, eli $(s'', w, e) \vdash_{M''} (s, w, \gamma) \vdash_{M''}^* (f, e, \gamma) \vdash_{M''} (f'', e, \gamma)$, niin myös $(s, w, e) \vdash_M (f, e, e)$ eli $w \in L(M)$.

Todistuksessa on oleellista huomata, että $\gamma \notin \Gamma$. Tämän vuoksi sitä ei käytetä missään Δ:n siirtymässä, joten voidaan olla varmoja, että pinossa on ainoastaan yksi γ, joka sinne aluksi laitettiin.

3. Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Oppikirjan vanhemmassa painoksessa rajoitutaan käsittelemään **yksinkertaisia** pinoautomaatteja, jotka täyttävät rajoitukset

   - Jos $\big((q, u, \beta), (p, \gamma)\big)$ on pinoautomaatin siirtymä, niin $|\beta| \leq 1$.
   - Jos $\big((q, u, e), (p, \gamma)\big) \in \Delta$, niin myös $\big((q, u, A), (p, \gamma A)\big) \in \Delta$ kaikille $A \in \Gamma$.

   Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat kirjassa).

   Uudemmassa painoksessa näitä rajoituksia ei erikseen esitetä, vaan ne on sisällytetty kieliopin muodostamisalgoritmiin. Tämä ratkaisu on vanhemman painoksen mukainen.

   Kieliopin muodostamisen ajatuksena on ottaa kielen nonterminaaleiksi kolmikkoja $\langle q, A, p\rangle$, missä $q, p \in K$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$. Ajatuksena on, että $\langle q, A, p\rangle$ generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta q tilaan p poistaen samalla pinosta symbolin A.

   Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

   1. Kaikille $f \in F$ asetetaan sääntö $S \to \langle s, e, f\rangle$.
   2. Kaikille siirtymille $\big((q, u, A), (r, B_1 \dots B_n)\big) \in \Delta$, missä $q, r \in K, u \in \Sigma^*, n > 0, B_1, \dots B_n \in \Gamma$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$, lisätään sääntö

   $$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, B_1, q_1\rangle\langle q_1, B_2, q_2\rangle \dots \langle q_{n-1}, B_n, p\rangle$$

   kaikille $p, q_1, \dots, q_{n-1} \in K$.

3. Kaikille siirtymille $\big((q,u,A),(r,e)\big) \in \Delta$, missä $q,r \in K, u \in \Sigma^*$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$, lisätään sääntö

$$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, e, p\rangle$$

4. Kaikille $q \in K$ lisätään sääntö $\langle q, e, q\rangle \to e$.

Säännöistä ensimmäinen ilmaisee, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2 olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta q tilaan p ja samalla poistetaan A pinosta. Säännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3 olevat säännöt ovat analogisia muotoa 2 olevien sääntöjen kanssa.

Tehtävän pinoautomaatti on

$$\begin{aligned}
M =&(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)\\
K =&\{s, q, f\}\\
\Sigma =&\{a, b\}\\
\Gamma =&\{a, b, c\}\\
F =&\{f\}\\
\Delta =&\big\{\big((s,e,e),(q,c)\big), \big((q,a,c),(q,ac)\big), \big((q,a,a),(q,aa)\big)\\
&\big((q,a,b),(q,e)\big), \big((q,b,c),(q,bc)\big), \big((q,b,b),(q,bb)\big)\\
&\big((q,b,a),(q,e)\big), ((q,e,c),(f,e))\big\}
\end{aligned}$$

Kielioppi $G = (V, \Sigma, R, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p\rangle \mid q, p \in K, A \in \Gamma \cup \{e\}\}$

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \to \langle s, e, f\rangle, && (1.)\\
& \langle s, e, s\rangle \to e, \langle q, e, q\rangle \to e, \langle f, e, f\rangle \to e, && (4.)\\
& \langle s, e, s\rangle \to e\langle q, c, s\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s, e, q\rangle \to e\langle q, c, q\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s, e, f\rangle \to e\langle q, c, f\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle q, c, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, c, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, a, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', a, s\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', a, q\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, a, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', a, f\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, b, s\rangle \to a\langle q, e, s\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, b, q\rangle \to a\langle q, e, q\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, b, f\rangle \to a\langle q, e, f\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, c, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, c, q\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', b, s\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', b, q\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', b, f\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, a, s\rangle \to b\langle q, e, s\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, a, q\rangle \to b\langle q, e, q\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, a, f\rangle \to b\langle q, e, f\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, c, s\rangle \to e\langle f, e, s\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q, c, q\rangle \to e\langle f, e, q\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q, c, f\rangle \to e\langle f, e, f\rangle && (3./tr.8)
\end{aligned}
$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä $S \to \langle s, e, f\rangle$, ja katsomalla, mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää. Tuloksena syntyvät säännöt ovat

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \to \langle s, e, f\rangle \\
& \langle s, e, f\rangle \to e\langle q, c, f\rangle \\
& \langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, q\rangle\langle q, c, f\rangle \\
& \langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, q\rangle\langle q, c, f\rangle \\
& \langle q, c, f\rangle \to e\langle f, e, f\rangle \\
& \langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q\rangle\langle q, a, q\rangle \\
& \langle q, a, q\rangle \to b\langle q, e, q\rangle \\
& \langle q, b, q\rangle \to b\langle q, b, q\rangle\langle q, b, q\rangle \\
& \langle q, b, q\rangle \to a\langle q, e, q\rangle \\
& \langle q, e, q\rangle \to e \\
& \langle f, e, f\rangle \to e\}
\end{aligned}
$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään $\langle q, c, f\rangle = S, \langle q, b, q\rangle = B, \langle q, a, q\rangle = A$, ja tulokseksi saadaan

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \to aAS, \\
& S \to bBS, \\
& S \to e, \\
& A \to aAA, \\
& A \to b \\
& B \to bBB, \\
& B \to a\}
\end{aligned}
$$