Tik-79.148 **Kevät 2001**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

4. Konstruktion perusajatuksena on käydä systemaattisesti läpi kaikki mahdolliset reitit alkutilasta kaikkiin lopputiloihin. Aluksi kaikki tilat numeroidaan yksikäsitteisesti, ja sen jälkeen muodostetaan reitti käyttäen rekursiivisia kaavoja.

   Rekursiiviset säännöt ovat:

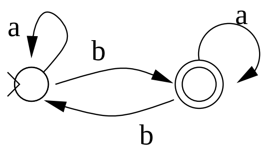
$$R(i,j,1) = \begin{cases} \{\sigma \in \Sigma \mid \delta(q_i,\sigma) = q_j\} & i \neq j \\ \{e\} \cup \{\sigma \in \Sigma \mid \delta(q_i,\sigma) = q_j\} & i = j \end{cases}$$
$$R(i,j,k+1) = R(i,j,k) \cup R(i,k,k)R(k,k,k)^*R(k,j,k)$$

   Merkintä $R(i,j,k)$ tarkoittaa kaikkia niitä reittejä tilasta q_i tilaan q_j, jotka eivät käy välillä tilassa q_k tai sitä suuremmassa tilassa.

   Ensimmäinen säännöistä sanoo, että mikäli välillä ei saa käydä missään tilassa, ainoat reitit tilojen q_i ja q_j välillä ovat suorat siirtymät.

   Säännöistä jälkimmäinen tarkoittaa, että reitit tilasta q_i tilaan q_j käymättä välillä tilassa q_{k+1} tai sitä suuremmassa tilassa, voidaan jakaan kahteen ryhmään: niihin, joissa ei käydä edes tilassa q_k, ja niihin, joissa käydään tilassa q_k.

   Tilakonetta



   vastaava säännöllinen lauseke saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} L(M) &= R(1,2,3) \\ R(1,2,3) &= R(1,2,2) \cup R(1,2,2)R(2,2,2)^*R(2,2,2) \\ R(1,2,2) &= R(1,2,1) \cup R(1,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1) \\ R(2,2,2) &= R(2,2,1) \cup R(2,1,1)R(1,1,1)^*R(1,2,1) \end{aligned}$$

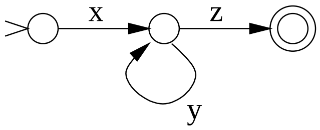
$$\begin{aligned} R(1,2,1) &= R(2,1,1) = b \\ R(1,1,1) &= R(2,2,1) = e \cup a \end{aligned}$$

   Lopuksi sijoitetetaan saadut lausekkeet aikaisempiin yhtälöihin, ja sievennetään tulokset:

$$\begin{aligned} R(1,2,2) &= b \cup (e \cup a)(e \cup a)^*b = a^*b \\ R(2,2,2) &= (e \cup a) \cup b(e \cup a)^*b = e \cup a \cup ba^*b \\ R(1,2,3) &= a^*b \cup a^*b(e \cup a \cup ba^*b)^*(e \cup a \cup ba^*b) \\ &= a^*b(a \cup ba^*b)^* \end{aligned}$$

5. Tilakoneiden pumppauslemman mukaan jokaiselle äärettömälle säännölliselle kielelle L löytyy jokin $k \geq 0$ siten, että kielen kaikki sitä pidemmät sanat w ($|w| > k$) voidaan jakaa kolmeen osaan x, y ja z ($y \neq e$) siten, että $xy^nz \in L, n \geq 0$.

   Toisin sanoen, mikäli säännöllinen kieli on ääretön, täytyy olla olemassa jokin merkkijono, jonka voi lisätä sanan keskelle mielivaltaisen monta kertaa. Lemma seuraa suoraan siitä, että sekä tilakoneiden tilajoukko että aakkosto ovat äärellisiä. Mikäli koneen kuvaama kieli on ääretön, kuuluu siihen mielivaltaisen pituisia sanoja. Kun sananpituus kasvaa suuremmaksi kuin tilakoneen tilojen määrä, täytyy laskennan aikana vierailla ainakin yhdessä tilassa kaksi tai useampia kertoja, eli tilakoneessa on silmukka. Tämä silmukka voidaan suorittaa mielivaltaisen monta kertaa (myös 0).

   Tehtävässä piti todistaa, että $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ei ole säännöllinen. Todistus onnistuu helpommin, mikäli määritellään kieli $L' = L \cap (ab)^*(ba)^*$. Koska säännöllisten kielten joukko on suljettu leikkauksen suhteen, ei L voi olla säännöllinen, jos L' ei ole säännöllinen.

   Tarkastelemalla kieleen L kuuluvia sanoja huomataan, että

   $$L' = (ab)^n(ba)^n, n \geq 0 \ .$$

   Jotta L' voisi olla säännöllinen, pitäisi siis löytää y, joka voidaan lisätä sanaan mielivaltaisen monta kertaa.

   Nyt y voi olla muotoa:

   1° $y = (ab)^r$ tai $y = (ba)^r, r > 0$ Nyt kuitenkin toinen puolisko kasvaisi pidemmäksi kuin toinen, joten syntyneet sanat eivät kuulu enää kieleen.

   2° $y = bb, y = aa, y = a(ba)^r$ tai $(ba)^rb, r \geq 0$ eivät myöskään kelpaa, sillä kielen sanoissa on aina yhtä monta a- kuin b-kirjainta.

   3° $y = a(ba)^rbb(ab)^rb$ ei käy, koska tällöin sanassa esiintyy ba ennen viimeisiä ab:ta.

   Näin huomattiin, että mikään y:n arvo ei ole mahdollinen. L' ei siis ole säännöllinen, joten myöskään L ei voi olla säännöllinen.

6. Säännöllisten kielten pumppauslemmalla voidaan osoittaa, että kieli *ei* ole säännöllinen, mutta sillä ei voida todistaa kielen säännöllisyyttä. Esimerkiksi kieli, johon kuuluvat kaikki tasapainotetut sulkeet (esim. (()()) ja (()) kuuluvat ko. kieleen) ei ole säännöllinen, koska kaikkiin kieleen kuuluviin sanoihin voi lisätä merkkijonon () mielivaltaisen monta kertaa, joten pumppauslemman ehto toteutuu.

   Kielen todistaminen säännölliseksi onnistuu yleensä helpoiten käyttämällä kieliperheen sulkeumaominaisuuksia: säännöllisten kielten joukko on suljettu unionin, katenaation, Kleenen tähden, komplementoinnin ja leikkauksen suhteen.

Tehtävässä on annettuna jokin säännöllinen kieli L, jonka avulla muodostetaan kieli

$$L' = \{xy \mid x \in L \text{ ja } y \notin L\}$$

Kieli L' on muodostettu katenaation avulla kielestä L ja sen komplementista $\overline{L}$ ($y \notin L \rightarrow y \in \overline{L}$). Koska säännöllisten kielten joukko on suljettu katenaation ja komplementin suhteen ja L on säännöllinen, on myös L' säännöllinen.

Toinen tapa esittää todistus olisi rakentaa kielen L' hyväksyvä tilakone. Koska L on säännöllinen, on olemassa deterministinen tilakone M, joka hyväksyy sen. Muodostetaan nyt deterministinen tilakone $\overline{M}$ siten, että se on muuten samanlainen kuin M, mutta hyväksyvien ja hylkäävien lopputilojen joukot vaihdetaan keskenään, eli $\overline{M}$ hyväksyy kaikki ne sanat, jotka M hylkää ja päinvastoin. Yhdistetään nyt nämä tilakoneet epädeterministiseksi koneeksi M', siten, että kaikista M:n lopputiloihin lisätään tyhjä siirtymä $\overline{M}$:n alkutilaan. Nyt M' hyväksyy kielen L', joten L' on säännöllinen.