Tik-79.148 **Kevät 2000**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 7
Ratkaisut

1. (3.3.2 b,c) Pinoautomaatti $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, missä K, Σ, s ja F on määritelty samalla tavalla kuin tilakoneellekin. Γ on pinoaakkosto, ja $\Delta \subset (K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$ on äärellinen siirtymärelaatio.

   Pinoautomaatissa on epädeterministiseen tilakoneeseen lisätty ääretön pino, jota käytetään laskennan aikana muistina. Ainoastaan pinon huippua voidaan käsitellä.

   Siirtymässä $((q_1, a, \alpha), (q_2, \beta))$ siirrytään tilasta q_1 tilaan q_2 lukemalla a syötteestä ja α pinon päältä. Samalla laitetaan β pinoon.

   Epädeterministinen pinoautomaatti M hyväksyy sanan w (eli $w \in L(M)$) mikäli syötteelle on olemassa jokin jono siirtymiä, jotka johtavat alkutilasta lopputilaan ja suorituksen lopuksi pino on tyhjä (eli $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$, jollekin $f \in F$).

   Tehtävässä:

   b)

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{c, d\} \\
\Delta =& \{((s, a, e), (s, cd)), ((s, e, e), (f, e)), \\
& ((f, b, c), (f, e)), ((f, b, d), (f, e)) \\
& ((f, e, d), (f, e))\}
\end{aligned}
$$

   Suorituksen aluksi automaatti lukee kaikki a-kirjaimet ja tallettaa niiden määrän pinoon. Koska n saa olla mitä tahansa välillä $m \leq n \leq 2m$, käytetään pinoaakkosissa kahdenlaisia symboleita. Jokaista pinoon talletettua c-kirjainta kohden täytyy syötteestä löytyä yksi b-kirjain, mutta d-kirjaimet voi poistaa pinosta myös ilman syötteen lukemista.

c)

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, f\} \\
F =& \{f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b\} \\
\Delta =& \{((s, a, e), (s, a)), ((s, b, e), (s, b)), \\
& ((s, a, e), (f, e)), ((s, b, e), (f, e)), \\
& ((s, e, e), (f, e)), ((f, a, a), (f, e)), \\
& ((f, b, b), (f, e))\}
\end{aligned}
$$

Automaatti toimii kahdessa vaiheessa:

i. Ensin luetaan sisään sanan alkupuolisko ja talletetaan luetut kirjaimet pinoon.
ii. Automaatti arvaa epädeterministisesti sanan keskikohdan, minkä jälkeen se tarkistaa, että pinosta löytyvät samat merkit kuin syötteestä.

2. (3.3.3)

Mille tahansa pinoautomaatille $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ voidaan määritellä kieli:

$$L_f(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha) \text{ jollekin } f \in F, \alpha \in \Gamma^*\}$$

Kieleen $L(M)$ kuuluvat ne sanat, joille löytyy jokin pinoautomaatin suoritus, joka päätyy lopputilaan siten, että syöte on käyty loppuun ja pino on tyhjä. $L_f(M)$ lisää tähän ne sanat, joille pino ei ole tyhjä suorituksen loppuessa. Tehtävän ideana on osoittaa, että $L(M)$ ja $L_f(M)$ ovat ilmaisuvoimaltaan yhtä voimakkaita.

a) Aluksi on osoitettava, että jokaiselle pinoautomaatille M on olemassa jokin automaatti M' siten, että $L(M') = L_f(M)$.
M' voidaan muodostaa siten, että lisätään M:ään uusi lopputila, jota käytetään pinon tyhjentämiseen suorituksen lopuksi:

$$
\begin{aligned}
M' =& (K', \Sigma, \Gamma, \Delta', s, F') \\
K' =& K \cup \{f'\}, f' \notin K \\
F' =& \{f'\} \\
\Delta' =& \Delta \cup \{((f, e, e), (f', e)) \mid f \in F\} \\
& \cup \{((f', e, \alpha), (f', e) \mid \alpha \in \Gamma\}
\end{aligned}
$$

Nyt jos $w \in L_f(M)$, niin $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha)$ joillakin $\alpha \in \Gamma^*$ ja $f \in F$. Tällöin myös (koska automaattien siirtymät ovat lisäyksiä lukuunottamatta samat) $(s, w, e) \vdash_{M'}^* (f, e, \alpha) \vdash_{M'} (f', e, \alpha) \vdash_{M'}^* (f', e, e)$, joten $w \in L(M')$.
Toiseen suuntaan: jos $w \in L(M')$, niin $(s, w, e) \vdash_{M'}^* (f, e, \alpha) \vdash_{M'}^* (f', e, e)$. Tällöin $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, \alpha)$, eli $w \in L_f(M)$.

b) Vielä täytyy osoittaa, että on olemassa jokin pinoautomaatti M'' siten, että $L_f(M'') = L(M)$. Yksinkertaisin tapa konstruoida M'' on pistää suorituksen aluksi pinon pohjalle jokin symboli γ, joka ei kuulu Γ:aan, ja muuten toimia kuten M. Nyt kaikille sanoille $w \in L(M)$ päädytään konfiguraatioon (f'', e, γ), joten $w \in L_f(M'')$. Formaalimmin:

$$\begin{aligned}
M'' =& (K'', \Sigma, \Gamma'', \Delta'', s'', F'') \\
K'' =& K \cup \{f'', s''\}, f'', s'' \notin K \\
\Gamma'' =& \Gamma \cup \{\gamma\}, \gamma \notin \Gamma \\
F'' =& \{f''\} \\
\Delta'' =& \Delta \cup \{((s'', e, e), (s, \gamma), ((f, e, \gamma), (f'', e)) \mid f \in F\}
\end{aligned}$$

Jos $w \in L(M)$, eli $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$ jollakin $f \in F$, niin myös $(s'', w, e) \vdash_{M''} (s, w, \gamma) \vdash_{M''}^* (f, e, \gamma) \vdash_{M''} (f'', e, \gamma)$, joten $w \in L_f(M'')$. Toiseen suuntaan: Jos $w \in L_f(M)$, eli $(s'', w, e) \vdash_{M''} (s, w, \gamma) \vdash_{M''}^* (f, e, \gamma) \vdash_{M''} (f'', e, \gamma)$, niin myös $(s, w, e) \vdash_M (f, e, e)$ eli $w \in L(M)$. Todistuksessa on oleellista huomata, että $\gamma \notin \Gamma$. Tämän vuoksi sitä ei käytetä missään Δ:n siirtymässä, joten voidaan olla varmoja, että pinossa on ainoastaan yksi γ, joka sinne aluksi laitettiin.

3. (3.4.1/3.4.2)

Annettua yhteydetöntä kielioppia $G = (V, \Sigma, R, S)$ vastaava pinoautomaatti voidaan muodostaa seuraavasti:

Automaattiin otetaan kaksi tilaa, p ja q. p on alkutila, josta siirrytään ensimmäisellä siirtymällä tilaan q, jossa pysytään koko loppusuorituksen ajan. Kieliopin ja pinoautomaatin aakkostot vastaavat toisiaan, joten $M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$.

Siirtymäfunktio Δ:an kuuluvat seuraavat siirtymät:

1. $((p, e, e), (q, S))$
2. $((q, e, A), (q, x)$ kaikille säännöille $A \to x$.
3. $((q, a, a), (q, e))$ kaikille $a \in \Sigma$

Automaatin suorituksen aluksi asetetaan pinoon kieliopin aloitussymboli. Tämän jälkeen voidaan pinon päällä oleva nonterminaali korvata jonkin vastaavan säännön oikealla puolella. Mikäli pinon päällä on jokin terminaalisymboli, luetaan sama symboli syötteestä.

Noudattamalla ylläolevia sääntöjä tehtävän kielioppiin saadaan aikaan pinoautomaatti $M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$, missä

$$\begin{aligned}
\Delta =& \{((p, e, e), (q, s)) & 1. \\
& ((q, e, S), (q, e)) & 2. \\
& ((q, e, S), (q, SS)) & 2. \\
& ((q, e, S), (q, (S))) & 2. \\
& ((q, (, (), (q, e)) & 3. \\
& ((q,),)), (q, e)) & 3.
\end{aligned}$$

4. (3.4.3 / 3.4.4)

Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Oppikirjan vanhemmassa painoksessa rajoitutaan käsittelemään **yksinkertaisia** pinoautomaatteja, jotka täyttävät rajoitukset:

- Jos $((q,u,\beta),(p,\gamma))$ on transitio, niin $|\beta| \leq 1$.
- Jos $((q,u,e),(p,\gamma)) \in \Delta$, niin myös $((q,u,A),(p,\gamma A) \in \Delta$ kaikille $A \in \Gamma$.

Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat kirjassa).

Uudemmassa painoksessa näitä rajoituksia ei erikseen esitetä, vaan ne on sisällytetty kieliopin muodostamisalgoritmiin. Tämä ratkaisu on vanhemman painoksen mukainen.

Kieliopin generoimisen ideana on ottaa kielen nonterminaaleiksi kolmikkoja $\langle q, A, p\rangle$, missä $q, p \in K$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$. Ajatuksena on, että $\langle q, A, p\rangle$ generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta q tilaan p poistaen samalla pinosta symbolin A.

Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

1. Kaikille $f \in F$ asetetaan sääntö $S \to \langle s, e, f\rangle$.
2. Kaikille siirtymille $((q,u,A),(r,B_1 \ldots B_n)) \in \Delta$, missä $q, r \in K, u \in \Sigma^*, n\rangle 0, B_1, \ldots B_n \in \Gamma$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$, lisätään sääntö

   $$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, B_1, q_1\rangle\langle q1, B_2, q_2\rangle \ldots \langle q_{n-1}, B_n, p\rangle$$

   kaikille $p, q_1, \ldots, q_{n-1} \in K$.
3. Kaikille siirtymille $((q,u,A),(r,e)) \in \Delta$, missä $q, r \in K, u \in \Sigma^*$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$, lisätään sääntö

   $$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, e, p\rangle$$

4. Kaikille $q \in K$ lisätään sääntö $\langle q, e, q\rangle \to e$.

Säännöistä ensimmäinen sanoo, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2. olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta q tilaan p ja samalla poistetaan A pinosta. Sännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3. olevat säännöt ovat analogisia 2. sääntöjen kanssa.

Tehtävän pinoautomaatille:

$$\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)\\
K =& \{s, q, f\}\\
\Sigma =& \{a, b\}\\
\Gamma =& \{a, b, c\}\\
F =& \{f\}\\
\Delta =& \{((s,e,e),(q,c)),((q,a,c),(q,ac)),((q,a,a),(q,aa))\\
& ((q,a,b),(q,e)),((q,b,c),(q,bc)),((q,b,b),(q,bb))\\
& ((q,b,a),(q,e)),((q,e,c),(f,e))\}
\end{aligned}$$

Kielioppi $G = (V, \Sigma, R, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p\rangle \mid q, p \in K, A \in \Gamma \cup \{e\}\}$

$$\begin{aligned}
R =& \{S \to \langle s,e,f\rangle, && (1.)\\
& \langle s,e,s\rangle \to e, \langle q,e,q\rangle \to e, \langle f,e,f\rangle \to e, && (4.)\\
& \langle s,e,s\rangle \to e\langle q,c,s\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s,e,q\rangle \to e\langle q,c,q\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s,e,f\rangle \to e\langle q,c,f\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle q,c,s\rangle \to a\langle q,a,s'\rangle\langle s',c,s\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q,c,q\rangle \to a\langle q,a,q'\rangle\langle q',c,q\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q,c,f\rangle \to a\langle q,a,f'\rangle\langle f',c,f\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q,a,s\rangle \to a\langle q,a,s'\rangle\langle s',a,s\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q,a,q\rangle \to a\langle q,a,q'\rangle\langle q',a,q\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q,a,f\rangle \to a\langle q,a,f'\rangle\langle f',a,f\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q,b,s\rangle \to a\langle q,e,s\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q,b,q\rangle \to a\langle q,e,q\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q,b,f\rangle \to a\langle q,e,f\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q,c,s\rangle \to b\langle q,b,s'\rangle\langle s',c,s\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q,c,q\rangle \to b\langle q,b,q'\rangle\langle q',c,q\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q,c,f\rangle \to b\langle q,b,f'\rangle\langle f',c,f\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q,b,s\rangle \to b\langle q,b,s'\rangle\langle s',b,s\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q,b,s\rangle \to b\langle q,b,q'\rangle\langle q',b,q\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q,b,s\rangle \to b\langle q,b,f'\rangle\langle f',b,f\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q,a,s\rangle \to b\langle q,e,s\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q,a,q\rangle \to b\langle q,e,q\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q,a,f\rangle \to b\langle q,e,f\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q,c,s\rangle \to e\langle f,e,s\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q,c,q\rangle \to e\langle f,e,q\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q,c,f\rangle \to e\langle f,e,f\rangle && (3./tr.8)
\end{aligned}$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä $S \to \langle s, e, f\rangle$, ja katsomalla mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää. Tuloksena syntyvät säännöt ovat:

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \to \langle s, e, f \rangle \\
& \langle s, e, f \rangle \to e\langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \to a\langle q, a, q \rangle\langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \to b\langle q, b, q \rangle\langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \to e\langle f, e, f \rangle \\
& \langle q, a, q \rangle \to a\langle q, a, q \rangle\langle q, a, q \rangle \\
& \langle q, a, q \rangle \to b\langle q, e, q \rangle \\
& \langle q, b, q \rangle \to b\langle q, b, q \rangle\langle q, b, q \rangle \\
& \langle q, b, q \rangle \to a\langle q, e, q \rangle \\
& \langle q, e, q \rangle \to e \\
& \langle f, e, f \rangle \to e \}
\end{aligned}
$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään $\langle q, c, f \rangle = S, \langle q, b, q \rangle = B, \langle q, a, q \rangle = A$, ja tulokseksi saadaan:

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \to aAS, \\
& S \to bBS, \\
& S \to e, \\
& A \to aAA, \\
& A \to b \\
& B \to bBB, \\
& B \to a \}
\end{aligned}
$$