Tik-79.148 **Kevät 2000**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 4
Ratkaisut

Deterministinen tilakone on monikko $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$, missä K on äärellinen tilojen joukko, Σ aakkosto, δ funktio $K \times \Sigma \to K$, $s \in K$ alkutila ja $F \subseteq K$ hyväksyvien lopputilojen joukko.
Kukin tilakone vastaa yhtä säännöllistä kieltä. Tilakone lähtee liikkeelle alkutilasta ja käy syötteen läpi kirjain kirjaimelta siirtyen aina δ:n mukaiseen uuteen tilaan. Jos tilakone on sanan loppuessa jossain F:n tilassa, sana kuuluu kieleen (tilakone hyväksyy sanan), muussa tapauksessa se ei kuulu (tilakone hylkää sanan).
Epädeterministinen tilakone $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ eroaa deterministisestä tilansiirtorelaationsa osalta. Epädeterminisisessä koneessa relaatio $\Delta \subseteq K \times \Sigma \cup \{e\} \times K$, eli yhdestä tilasta voi olla monta eri siirtymää samalle symbolille, ja lisäksi sallitaan tyhjät (e) siirtymät, joissa automaatti voi siirtyä epädeterministisesti uuteen tilaan ilman mitään syötettä. Epädeterministinen tilakone hyväksyy sanan, mikäli löytyy jokin reitti alkutilasta johonkin hyväksyvään lopputilaan.
Sovellutuksissa ei ole mahdollista vain arvata suoraan oikeaa reittiä lopputilaan, vaan käytännössä joudutaan käymään kaikki mahdolliset reitit systemaattisesti läpi. Epädeterministisiä tilakoneita kuitenkin käytetään, koska on olemassa tehokkaita algoritmeja epädeterministisen tilakoneen muodostamiseksi säännöllisestä lausekkeesta. Mikäli suorituksen nopeus on tärkeää, voidaan epädeterministinen kone muuttaa aina deterministiseksi.

1. (2.1.2)

   (a) Tilakone hyväksyy kielen, jossa jokainen sana alkaa a:lla, ja sen jälkeen toistuu ba kuinka monta kertaa tahansa. Formaalimmin kone on $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$, $K = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ (tilat numeroitu myötäpäivään alkutilasta lähtien), $s = q_0, F = \{q_1\}$. Tilasiirtofunktio δ on:

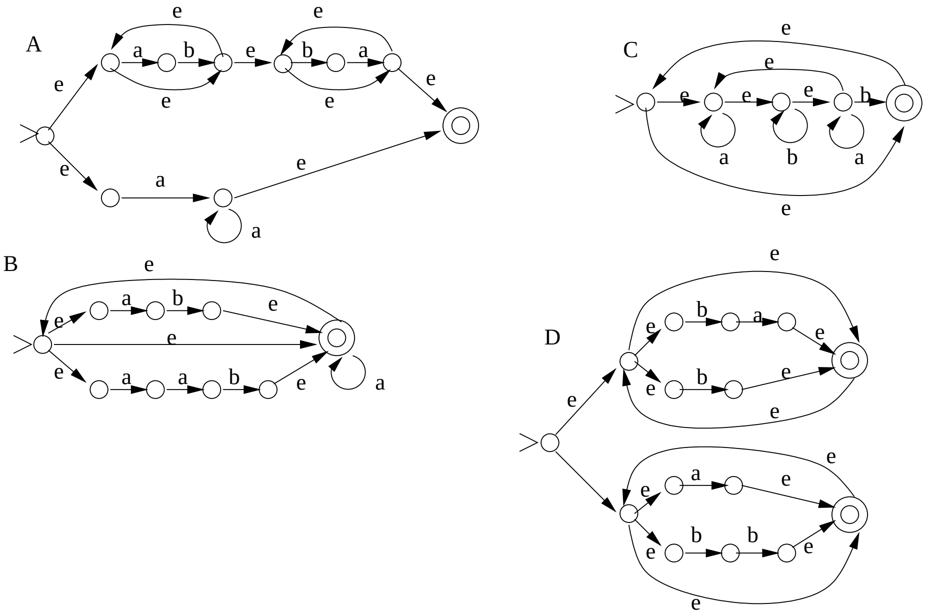
Tila	Symboli	Uusi Tila
q_0	a	q_1
q_0	b	q_3
q_1	a	q_2
q_1	b	q_0
q_2	a	q_3
q_2	b	q_3
q_3	a	q_3
q_3	b	q_3

   Tilakonetta vastaava säännöllinen lauseke on $(a(ba)^*)$.

   (b) Aluksi saa olla kuinka monta a:ta tahansa ja lopuksi yksi b. (a^*b).

   (c) Joko tyhjä, tai sitten alkaa a:lla, yhtä monta a:ta kuin b:tä, kuitenkin korkeintaan kaksi peräkkäistä a:ta. $(a(ab)^*b)^*$.

2. (2.2.3/2.2.2)

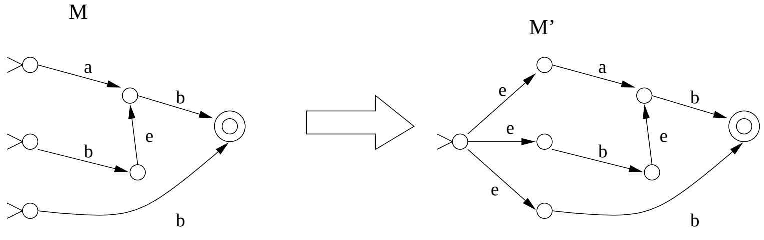


3. (2.2.4b / 2.2.5)

   Olkoon $M = (K, \Sigma, \Delta, S, F)$, missä $S \subseteq K$ on alkutilojen joukko. Tällaiselle koneelle voidaan aina konstruoida vastaava tavallinen epädeterministinen tilakone seuraavasti:

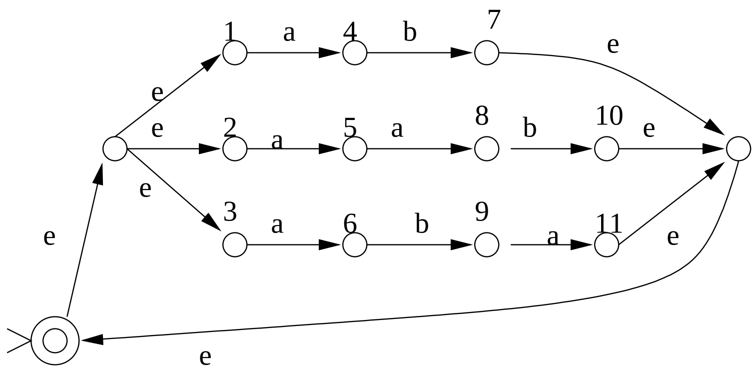
$$M' = (K \cup \{s'\}, \Sigma, \Delta', s', F), s' \notin K, \text{ jossa}$$
$$\Delta' = \Delta \cup \{(s', e, s) \mid s \in S\}$$

   Konstruktion perusajatuksena on, että M' on muuten samanlainen kone kuin M on, mutta siihen lisätään yksi tila lisää. Tämä uusi tila otetaan alkutilaksi, ja lisätään siitä e-siirtymät kaikkiin M:n alkutiloihin. Nyt M' on kirjan määritelmän mukainen yhden alkutilan automaatti, ja molemmat tilakoneet hyväksyvät selvästikin saman kielen, eli $L(M) = L(M')$. Ehdotettu laajennus ei tuo tilakoneisiin lisää ilmaisuvoimaa.



4. (2.2.6 / 2.3.1)

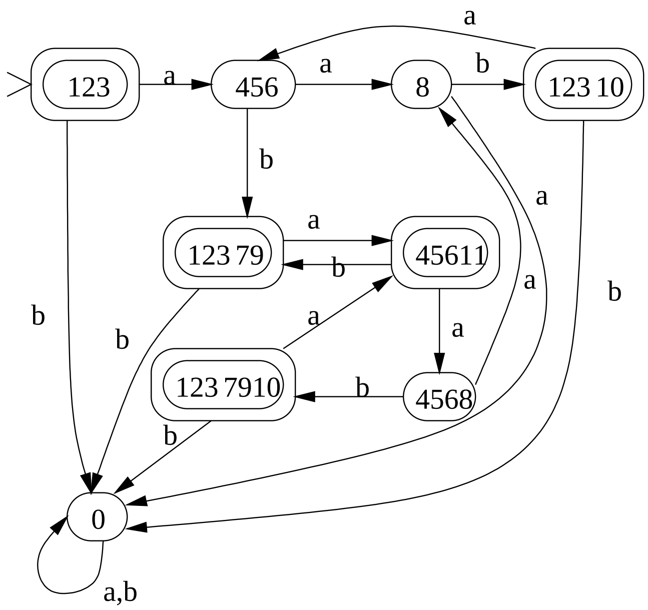
a)



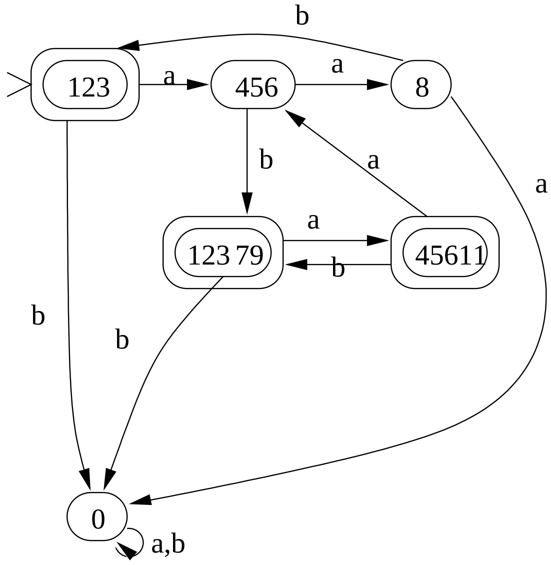
b) Tilakone muutetaan determinisiseksi siten, että muodostetaan kaikille mahdollisille syötteille kaikkien niiden tilojen joukko, jossa epädeterministinen tilakone voi olla. Näistä joukoista tehdään determinististen tilakoneen tilat.

Tehtävän tilakoneessa on yksinkertaisuuden vuoksi numeroitu ainoastaan ne tilat, joihin ei liity pelkkiä e-siirtymiä. Tilakoneen alkutilasta päästään e-siirtymillä tiloihin 1, 2 ja 3, joten deterministisen tilakoneen alkutilaksi tulee tila 123. Näistä kolmesta tilasta voidaan a:lla siirtyä tiloihin 4, 5 tai 6, ja b:llä ei päästä minnekään. Alla on tilasiirtymien taulukko (sitäkin on yksinkertaistettu, esimerkiksi toisella rivillä oleva tila 79 pitää sisällään myös kaikki ne tilat, joihin päästään e-siirtymillä tiloista 7 ja 9). Lopputiloiksi otetaan kaikki ne tilat, joihin sisältyy jokin epädeterministisen tilakoneen lopputiloista.

Tila	a	b
123	456	∅
456	8	12379
8	∅	12310
12379	45611	∅
12310	456	∅
45611	4568	12379
4568	8	1237910
1237910	45611	∅

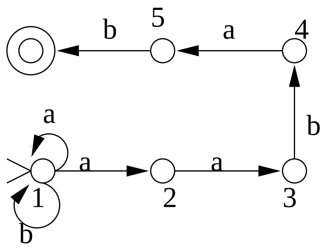


c) Tarkastelemalla saatua tilakonetta huomataan, että tilat 123 ja 12310 ovat molemmat lopputiloja, ja niistä lähtevät kaaret vievät samoihin tiloihin. Ne voidaankin yhdistää. Samoin myös 12379 ja 1237910 ovat ekvivalentit. Kun 12379 ja 1237910 on yhdistetty, ovat myös 468 ja 4568 ekvivalentteja. Minimoitu tilakone on:



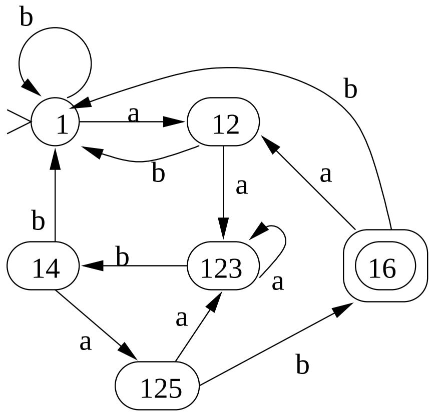
5. (2.2.7 / -)

   a)



   b) Tilataulukko on:

Tila	a	b
1	12	1
12	123	1
123	123	14
14	125	1
125	123	16
16	12	1



   c) Saadusta tilakoneesta ei voida supistaa yhtään tilaa pois. Tiloista 1 ja 16 lähtevät kaaret menevät kyllä samoihin tiloihin, mutta koska vain toinen niistä on lopputila, ei niitä saa yhdistää.

6. (- /2.2.7)

   Annettu väite:

$$(q, xy) \vdash_M^* (p, y) \text{ jos ja vain jos } (q, x) \vdash_M^* (p, e)$$

Määritelmän mukaan $(q, w) \vdash_M (q', w')$ jos ja vain jos on olemassa $u \in \Sigma \cup \{e\}$ siten, että $w = uw'$ ja $(q, u, q') \in \Delta$. Toisin sanoen, konfiguraatiosta (q, w) pääsee yhdellä askeleella konfiguraatioon (q', w') ainoastaan, jos $w = w'$ ja tilasta q on tyhjä siirtymä tilaan q' tai w' on w:n loppuosa, ja tilasta q on w:n ensimmäisellä merkillä siirtymä tilaan q'. Merkintä $\vdash_M^*$ tarkoittaa $\vdash_M$:n refleksiivistä ja transitiivista sulkeumaa.

Jos $(q, xy) \vdash_M^* (p, y)$, niin määritelmän mukaan on olemassa konfiguraatiojono $(q, xy) \vdash_M (q_1, w_1 y), \vdash_M (q_2, w_2 y) \vdash_M \cdots \vdash_M (q_n, w_n y) \vdash_M (p, y)$, missä

$$\begin{aligned} w_0 &= x \\ w_i &= u w_{i+1}, u \in \Sigma \cup \{e\} \ . \end{aligned}$$

Koska jokaisella askeleella uusi tila määräytyy vain syötteen ensimmäisen merkin perusteella, ei sanan muilla merkeillä ole vaikutusta siirtymään. Lisäksi syötteen pituus ei voi missään vaiheessa kasvaa, joten ei ole mahdollista, että käytäisiin välillä katsomassa joitain merkkijonon y kirjaimia, ja kirjoitettaisiin ne takaisin nauhalle. Näin ollen ylläolevan suorituksen aikana ei merkkijonoa y käytetä hyväksi missään siirtymässä ja kaikki siirtymät valitaan x:n kirjainten perusteella.

Koska pelkästään x vaikuttaa tilakoneen suoritukseen, voidaan tismalleen samat siirtymät suorittaa, vaikka y korvattaisiinkin tyhjällä merkkijonolla e, joten

$$(q, xy) \vdash_M^* (p, y) \Rightarrow (q, x) \vdash_M^* (p, e)$$

Toiseen suuntaan todistus onnistuu täysin samalla argumentilla.

7. Yhdistetyn tilakoneen tiloiksi otetaan kaikki mahdolliset parit, jotka voidaan muodostaa alkuperäisten tilakoneiden tiloista. Esim, mikäli $K_1 = \{q_1, q_2, q_3\}$ ja $K_2 = \{p_1, p_2\}$, niin yhdistetyn koneen tilat ovat

$$K = \{(q_1, p_1), (q_2, p_1), (q_3, p_1), (q_1, p_2), (q_2, p_2), (q_3, p_2)\} \ .$$

Konseptuaalisesti koneiden siirtymät jaetaan kahteen luokkaan, sisäisiin ja ulkoisiin. Siirtymä on sisäinen, mikäli siihen liittyvä symboli ei kuulu toisen tilakoneen aakkostoon. Tehtävänannossa ainoa M_1:n sisäinen siirtymä on $q_3 \stackrel{int_1}{\rightarrow} q_0$. Tilakoneella M_2 on neljä sisäistä siirtymää, ne jotka tehdään symbolilla int_2. Mikäli siirtymän symboli esiintyy molemmissa tilakoneissa, on siirtymä ulkoinen.

Yhdistetyn tilakoneen siirtymärelaation muodostamissäännöt tarkoittavat käytännössä sitä, että tilakoneet synkronoivat toimintansa ulkoisten siirtymien kautta. Tilakone voi tehdä sisäisiä siirtymiä milloin vain, mutta ulkoinen siirtymä voidaan tehdä vain, kun molemmat koneet tekevät saman siirtymän samaan aikaan.

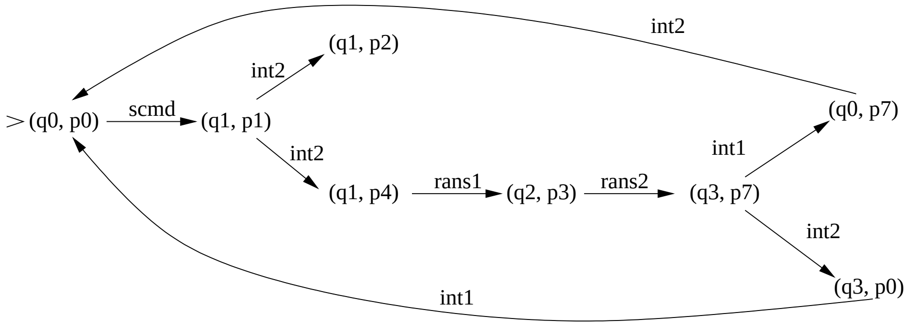
Tehtävän tilakoneiden tilajoukot ovat

$$\begin{aligned} K_1 &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\ K_2 &= \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\} \ , \end{aligned}$$

joten yhdistetyssä tilakoneessa on $4 \times 8 = 32$ tilaa. Huomattavan monia näistä tiloista ei kuitenkaan voida koskaan saavuttaa, joten tila-avaruus supistuu muotoon:

$$K = \{(q_0, p_0), (q_1, p_1), (q_1, p_2), (q_1, p_4), (q_2, p_3), (q_3, p_7), (q_0, p_7), (q_3, p_0)\}$$

Tilakoneen siirtymät on esitetty alla olevassa kuvassa.



Kuvasta huomataan, että tilasta (q_1, p_2) ei johda yhtään kaarta eteenpäin. Kyseiseen tilaan on mahdolista päästä alkutilasta suorituksella

$$(q_0, p_0) \stackrel{scmd}{\rightarrow} (q_1, p_1) \stackrel{int_2}{\rightarrow} (q_1, p_2) \enspace ,$$

joten systemissä on saavutettavissa oleva lukkiuma.

Tehtävässä ei ole määritelty lopputiloja tilakoneille, koska tiedonsiirtoprotokollia analysoitaessa ei yleensä olla kiinnostuneista yksittäisistä suorituksita vaan käsitellään äärettömän mittaisia viestijonoja. Tavalliset tilakoneet sallivat ainoastaan äärellisen (tosin mielivaltaisen pitkän) syötteen, ja äärettömiä sanoja tunnistamaan käytetäänkin vahvempia automaattiluokkia, yleensä Büchi-automaatteja. Nämä automaatit eivät kuitenkaan kuulu tämän kurssin asioihin, ja niihin pääsee tutustumaan kurssilla Tik-79.179 Rinnakkaiset ja hajautetut järjestelmät.