Tik-79.148 **Kevät 1999**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 8
Ratkaisut

1. (3.4.3 / 3.4.4)

   Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Oppikirjan vanhemmassa painoksessa rajoitutaan käsittelemään **yksinkertaisia** pinoautomaatteja, jotka täyttävät rajoitukset:

   - Jos $((q, u, \beta), (p, \gamma))$ on transitio, niin $|\beta| \leq 1$.
   - Jos $((q, u, e), (p, \gamma)) \in \Delta$, niin myös $((q, u, A), (p, \gamma A) \in \Delta$ kaikille $A \in \Gamma$.

   Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat kirjassa).

   Uudemmassa painoksessa näitä rajoituksia ei erikseen esitetä, vaan ne on sisällytetty kieliopin muodostamisalgoritmiin. Tämä ratkaisu on vanhemman painoksen mukainen.

   Kieliopin generoimisen ideana on ottaa kielen nonterminaaleiksi kolmikkoja $< q, A, p >$, missä $q, p \in K$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$. Ajatuksena on, että $< q, A, p >$ generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta q tilaan p poistaen samalla pinosta symbolin A.

   Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

   1. Kaikille $f \in F$ asetetaan sääntö $S \rightarrow < s, e, f >$.
   2. Kaikille siirtymille $((q, u, A), (r, B_1 \ldots B_n)) \in \Delta$, missä $q, r \in K, u \in \Sigma^*, n > 0, B_1, \ldots B_n \in \Gamma$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$, lisätään sääntö

      $$< q, A, p > \rightarrow u < r, B_1, q_1 >< q1, B_2, q_2 > \cdots < q_{n-1}, B_n, p >$$

      kaikille $p, q_1, \ldots, q_{n-1} \in K$.
   3. Kaikille siirtymille $((q, u, A), (r, e)) \in \Delta$, missä $q, r \in K, u \in \Sigma^*$ ja $A \in \Gamma \cup \{e\}$, lisätään sääntö

      $$< q, A, p > \rightarrow u < r, e, p >$$

   4. Kaikille $q \in K$ lisätään sääntö $< q, e, q > \rightarrow e$.

   Säännöistä ensimmäinen sanoo, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2. olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta q tilaan p ja samalla poistetaan A pinosta. Sännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3. olevat säännöt ovat analogisia 2. sääntöjen kanssa.

Tehtävän pinoautomaatille:

$$
\begin{aligned}
M =& (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F) \\
K =& \{s, q, f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b, c\} \\
F =& \{f\} \\
\Delta =& \{((s, e, e), (q, c)), ((q, a, c), (q, ac)), ((q, a, a), (q, aa)) \\
& ((q, a, b), (q, e)), ((q, b, c), (q, bc)), ((q, b, b), (q, bb)) \\
& ((q, b, a), (q, e)), ((q, e, c), (f, e))\}
\end{aligned}
$$

Kielioppi $G = (V, \Sigma, R, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{< q, A, p > | q, p \in K, A \in \Gamma \cup \{e\}\}$

$$
\begin{aligned}
R =& \{S \to < s, e, f >, && (1.) \\
& < s, e, s > \to e, < q, e, q > \to e, < f, e, f > \to e, && (4.) \\
& < s, e, s > \to e < q, c, s >, && (2./tr.1) \\
& < s, e, q > \to e < q, c, q >, && (2./tr.1) \\
& < s, e, f > \to e < q, c, f >, && (2./tr.1) \\
& < q, c, s > \to a < q, a, s' >< s', c, s > && (2./tr.2) \\
& < q, c, q > \to a < q, a, q' >< q', c, q > && (2./tr.2) \\
& < q, c, f > \to a < q, a, f' >< f', c, f > && (2./tr.2) \\
& < q, a, s > \to a < q, a, s' >< s', a, s > && (2./tr.3) \\
& < q, a, q > \to a < q, a, q' >< q', a, q > && (2./tr.3) \\
& < q, a, f > \to a < q, a, f' >< f', a, f > && (2./tr.3) \\
& < q, b, s > \to a < q, e, s > && (3./tr.4) \\
& < q, b, q > \to a < q, e, q > && (3./tr.4) \\
& < q, b, f > \to a < q, e, f > && (3./tr.4) \\
& < q, c, s > \to b < q, b, s' >< s', c, s > && (2./tr.5) \\
& < q, c, q > \to b < q, b, q' >< q', c, q > && (2./tr.5) \\
& < q, c, f > \to b < q, b, f' >< f', c, f > && (2./tr.5) \\
& < q, b, s > \to b < q, b, s' >< s', b, s > && (2./tr.6) \\
& < q, b, s > \to b < q, b, q' >< q', b, q > && (2./tr.6) \\
& < q, b, s > \to b < q, b, f' >< f', b, f > && (2./tr.6) \\
& < q, a, s > \to b < q, e, s > && (3./tr.7) \\
& < q, a, q > \to b < q, e, q > && (3./tr.7) \\
& < q, a, f > \to b < q, e, f > && (3./tr.7) \\
& < q, c, s > \to e < f, e, s > && (3./tr.8) \\
& < q, c, q > \to e < f, e, q > && (3./tr.8) \\
& < q, c, f > \to e < f, e, f > && (3./tr.8)
\end{aligned}
$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä $S \rightarrow < s, e, f >$, ja katsomalla mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää. Tuloksena syntyvät säännöt ovat:

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \rightarrow < s, e, f > \\
& < s, e, f > \rightarrow e < q, c, f > \\
& < q, c, f > \rightarrow a < q, a, q >< q, c, f > \\
& < q, c, f > \rightarrow b < q, b, q >< q, c, f > \\
& < q, c, f > \rightarrow e < f, e, f > \\
& < q, a, q > \rightarrow a < q, a, q >< q, a, q > \\
& < q, a, q > \rightarrow b < q, e, q > \\
& < q, b, q > \rightarrow b < q, b, q >< q, b, q > \\
& < q, b, q > \rightarrow a < q, e, q > \\
& < q, e, q > \rightarrow e \\
& < f, e, f > \rightarrow e \}
\end{aligned}
$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään $< q, c, f >= S, < q, b, q >= B, < q, a, q >= A$, ja tulokseksi saadaan:

$$
\begin{aligned}
R = \{ & S \rightarrow aAS, \\
& S \rightarrow bBS, \\
& S \rightarrow e, \\
& A \rightarrow aAA, \\
& A \rightarrow b \\
& B \rightarrow bBB, \\
& B \rightarrow a \}
\end{aligned}
$$

2. (4.1.2)

   Turingin kone on tilakoneen yleistys, jossa lukupäätä voidaan liikuttaa molempiin suuntiin syötenauhaa. Nauhalle voidaan myös kirjoittaa jokin aakkoston symboleista.

   Formaalisti Turingin kone määritellään seuraavasti: (tämä määritelmä on oppikirjan vanhemman painoksen mukainen, uudessa painoksessa kone määritellään hieman eri tavalla, mutta perusidea on samanlainen).

   Turingin kone on nelikko $M = (K, \Sigma, \delta, s)$, missä K on tilojen joukko, johon **ei** kuulu lopputilaa h, Σ on aakkosto, johon kuuluu tyhjä merkki $\#$, mutta ei symboleita L ja R, $s \in K$ on alkutila ja δ on funktio $K \times \Sigma \rightarrow (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$.

   Turingin koneen kulloinkin valittava siirtymä riippuu tilasta, jossa kone on ja lukupään kohdalla olevasta symbolista. Siirtymässä kone siirtyy uuteen tilaan ja joko kirjoittaa nauhalle uuden symbolin tai siirtää lukupäätä oikealle (R) tai vasemmalle (L).

   Syötenauha on oikealle päin äärettömän mittainen. Turingin koneen saama syöte on kirjoitettuna nauhan vasempaan päähän, ja syötteestä oikealle nauha on tyhjä (eli jokaisessa kohdassa on '#').

Turingin kone pysähtyy, mikäli se siirtyy jossain vaiheessa tilaan h. Mikäli kone yrittää siirtää lukupäätänsä vasemalle pois nauhalta, se jää jumiin (*hangs*), mutta ei varsinaisesti pysähdy.

Tehtävässä Turingin kone $M = (K, \Sigma, \delta, s)$, missä

$$
\begin{aligned}
K &= \{q_0, q_1, q_2\} \\
\Sigma &= \{a, b, \#\} \\
s &= q_0
\end{aligned}
$$

ja

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	no.
q_0	a	(q_1, L)	1.
q_0	b	(q_0, R)	2.
q_0	$\#$	(q_0, R)	3.
q_1	a	(q_1, L)	4.
q_1	b	(q_2, R)	5.
q_1	$\#$	(q_1, L)	6.
q_2	a	(q_2, R)	7.
q_2	b	(q_2, R)	8.
q_2	$\#$	$(h, \#)$	9.

Lähdettäessä liikkeelle konfiguraatiosta $(q_0, a\underline{b}b\#bb\#\#aba)$ tapahtuu seuraavaa:

Tila	Nauha	Siirtymä
q_0	$a\underline{b}b\#bb\#\#aba)$	2.
q_0	$ab\underline{b}\#bb\#\#aba)$	2.
q_0	$abb\underline{\#}bb\#\#aba)$	3.
...	...	...
q_0	$abb\#bb\#\#\underline{a}ba)$	1.
q_1	$abb\#bb\#\underline{\#}aba)$	4.
q_1	$abb\#bb\underline{\#}\#aba)$	4.
q_1	$abb\#b\underline{b}\#\#aba)$	5.
q_2	$abb\#bb\underline{\#}\#aba)$	9.
h	$abb\#bb\underline{\#}\#aba)$	

3. (4.1.4)

$$
\begin{aligned}
M &= (K, \Sigma, \delta, s) \\
K &= \{q_0, q_1, q_2\} \\
\Sigma &= \{a, \#\} \\
s &= q_0
\end{aligned}
$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	(q_1, L)
q_0	$\#$	$(q_0, \#)$
q_1	a	$(q_2, \#)$
q_1	$\#$	$(h, \#)$
q_2	a	(q_2, a)
q_2	$\#$	(q_0, L)

Tarkastellaan koneen käyttäytymistä muutamalla eri n:n arvolla.

(a) Esim. $n = 3, (q_0, \#aaa\underline{a}) \vdash (q_1, \#aa\underline{a}a) \vdash (q_2, \#aa\underline{\#}a) \vdash (q_0, \#a\underline{a}\#a) \vdash (q_1, \#\underline{a}a\#a) \vdash (q_2, \#\underline{\#}a\#a) \vdash (q_0, \underline{\#}\#a\#a) \vdash^* (q_0, \underline{\#}\#a\#a)$. Turingin kone yritti siirtyä pois nauhalta, ja jäi jumiin.

(b) Esim. $n = 2, (q_0, \#aa\underline{a}) \vdash (q_1, \#a\underline{a}a) \vdash (q_2, \#a\underline{\#}a) \vdash (q_0, \#\underline{a}\#a) \vdash (q_1, \underline{\#}a\#a) \vdash (h, \underline{\#}a\#a)$ Tällä kertaa kone pysähtyi.

Turingin kone poistaa nauhalta joka toisen a-kirjaimen. Kokeilemalla vielä muillakin n:n arvoilla huomataan, että aina kun nauhalla on parillinen määrä a-kirjaimia (siis n pariton) kone jää jumiin, ja aina parittomalla määrällä pysähtyy.

4. (4.1.6)

Oikeista konfiguraatioista on tässä lyhennetty merkintä, vääristä lyhyt perustelu, missä on virhe.

i) $(q, a\#a\#\underline{\#}\#a)$

ii) $(q, abc\underline{b}abc)$

iii) $(p, abc\underline{\#})$

iv) ei kelpaa, sillä luettava merkki $e \notin \Sigma$.

v) Muuten oikein, mutta syötteen lopussa olevat tyhjät merkitään näkyviin ainoastaan mikäli ne ovat lukupään kohdalla tai vasemmalla puolella. Pitäisi olla $(q, a\#ab\underline{b}ab\#b)$.

vi) Lukupään kohdalla ab on merkkijono, ei yksittäinen merkki.

vii $(q, \underline{\#}\#\#\#\#a)$

viii $(h, abc\underline{a})$